高等光电系统与信号处理

曹德忠dzcao@ytu.edu.cn
钟楼1314

课程内容简介

- 光学信息处理系统
- 光电检测系统
- 信号处理专题

目录

目 录

信号处理初步（专题选讲）

- 语音信号处理
- 小波变换在光电系统中的应用
- 傅里叶轮廓术与三维成像
- ZnO半导体纳米器件
- 硅基光学集成器件
- 三维定位与机械臂研究
- 压缩感知与单像素成像

教材推荐

- 课程讲义，曹德忠等（未出版）。
- 光电探测与信号处理，安毓英、曾晓东、冯喆珺，科学出版社2010。
- 光电检测技术与系统，王霞，王吉晖，高岳，金伟其，电子工业出版社2015。
- S. O. Kasap, Optoelectronics and Photonics: Principles and Practices, Pearson (second edition) 2012.

参考书目

《光电检测技术》曾光宇等编著　清华大学出版社

《激光光电检测》吕海宝等编著　国防科技大学出版社

《光电检测技术》雷玉堂等编著　中国计量出版社

《傅里叶光学导论》J. W. Goodman 著 秦克诚 等译 电子工业出版社

绪 论

光电检测是信息时代的关键技术

- 信息技术:
  - 微电子信息技术（电集成）、光子信息技术（光集成）、光电信息技术（光电集成）。
  - 感测技术、通信技术、人工智能与计算机技术、控制技术。
  - 信息的产生和获取、转换、传输、控制、存储、处理、显示。

光电信息技术

以光电子学为基础,以光电子器件为主体,研究和发展光电信息的形成、传输、接收、变换、处理和应用。它涉及到:

1、光电源器件（包括激光器）和可控光功能器件及集成

2、光通信和综合信息网络

3、光频微电子

4、光电方法用于瞬态光学观测

5、光电传感、光纤传感和图象传感

6、激光、红外、微光探测，定向和制导

7、光电精密测试，在线检测和控制技术

8、混合光电信息处理、识别和图象分析

光电信息技术

9、光电人工智能和机器视觉

10、光（电）逻辑运算和光（电）计算机及光电数据存储

11、生物光子学

本课程着重在第5、6、7三个方面的一些基本知识，即：**光电检测的元器件、系统、方法和应用**。

光电检测技术

- 检测与测量
- 光电传感器：
  - 基于光电效应，将光信号转换为电信号的一种光电器件
  - 将非电量转换为与之有确定对应关系的电量输出。
- 光电检测技术： 是利用光电传感器实现各类检测。它将被测量的量转换成光通量,再转换成电量，并综合利用信息传送和处理技术，完成在线和自动测量
- 光电检测系统
  - 光学变换
  - 光电变换
  - 电路处理

检测的基本概念

定义：确定被测对象的属性和量值为目的的全部操作

被测对象：　宇宙万物（固液气体、动物、植物、天体 ……）

被测信息：　物理量（光、电、力、热、磁、声、…）

化学量（PH、成份…）

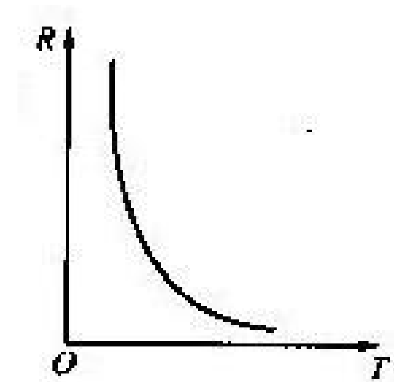
生物量（酶、葡萄糖、…）

… …

全部操作：检测器具　传感器、检测仪器、检测装置、检测系统

检测过程　信号采集、信号处理、信号显示、信号输出

例：空调机测量控制室温



被测对象： 室内空气

被测信息： 温度

检测器具： 温度传感器 --- 热电阻、热电偶

操作过程： 空气 → 热敏电阻 → 电信号 → 处理 → 显示

空调机

返回

- **直接测量：** 对仪表读数不经任何运算，直接得出被测量的数值。例如：
  - 长度：直尺、游标卡尺、千分尺
  - 电压：万用表
  - 质量：天平
- **间接测量：** 测量几个与被测量相关的物理量，通过函数关系式计算出被测量。例如：
  - 电功率：**P = I * V**（电流/电压）
  - 重力加速度：单摆测量（**L**：摆的线长，**T**：摆动的周期）

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

返回

光电探测器的种类

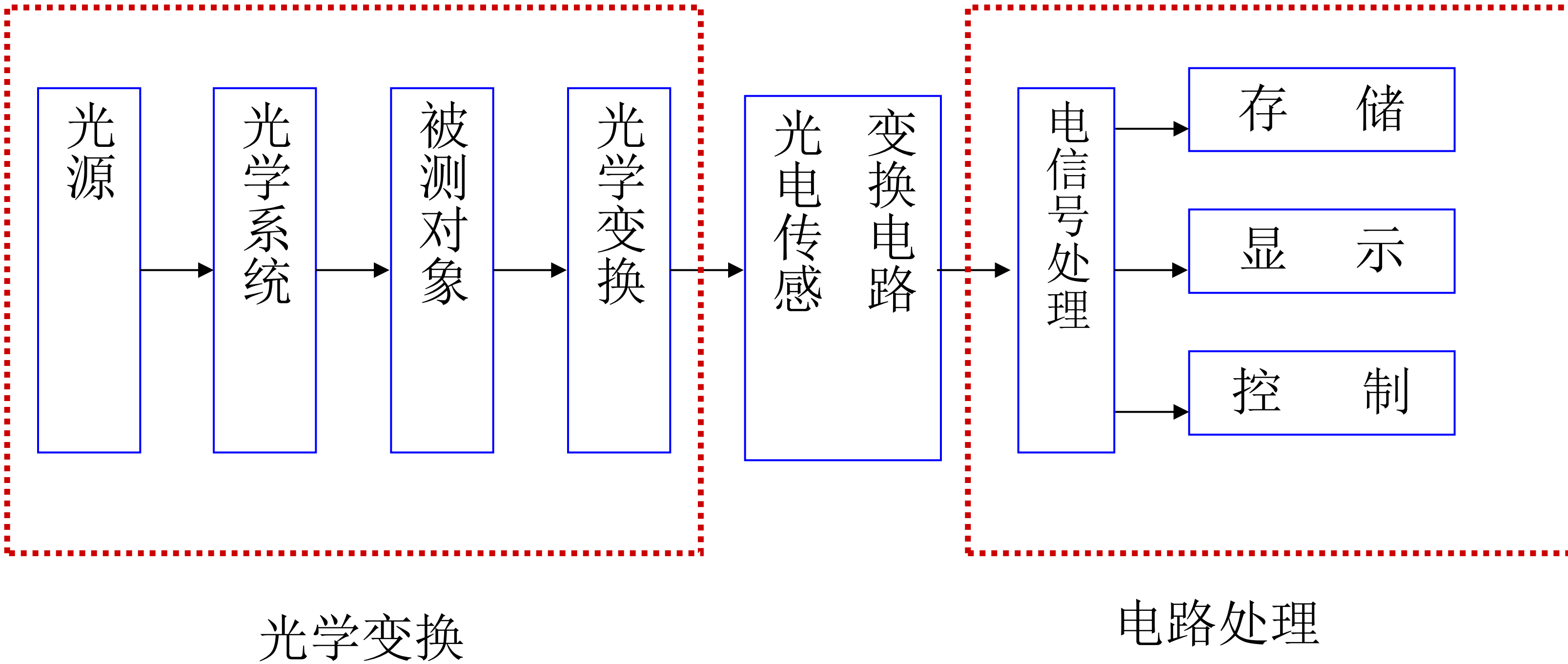
类 型	实 例
PN结	PN光电二极管（Si,Ge, GaAs) PIN光电二极管（Si） 雪崩光电二极管(Si, Ge) 光电晶体管(Si) 集成光电传感器和光电晶闸管(Si)
非PN结	光电元件(CdS, CdSe, Se, PbS) 热电元件(PZT, LiTaO3, PbTiO$_3$)
电子管类	光电管，摄像管，光电倍增管
其他类	色敏传感器 固体图象传感器（SI，CCD/MOS/CPD型） 位置检测用元件（PSD）
	光电池

返回

光电检测系统

- 光电检测技术以激光、红外、光纤等现代光电器件为基础，通过对载有被检测物体信号的光辐射（发射、反射、散射、衍射、折射、透射等）进行检测，即通过光电检测器件接收光辐射并转换为电信号。
- 由输入电路、放大滤波等检测电路提取有用的信息，再经过A/D变换接口输入微型计算机运算、处理，最后显示或打印输出所需检测物体的几何量或物理量。

光电检测系统



光电检测系统

- 光学变换
  - 时域变换：调制振幅、频率、相位、脉宽
  - 空域变换：光学扫描
  - 光学参量调制：光强、波长、相位、偏振
  - 形成能被光电探测器接收，便于后续电学处理的光学信息。
- 光电变换
  - 光电/热电器件（传感器）、变换电路、前置放大
  - 将信息变为能够驱动电路处理系统的电信息（电信号的放大和处理）。
- 电路处理
  - 放大、滤波、调制、解调、A/D、D/A、微机与接口、控制。

光电检测系统与人操作功能比较

- 被测物体 感觉器官 人脑 手控
- 被测物体 光电传感 微机 执行机构
- 光电传感部分相当于人身的感觉器官

光电检测系统的功能分类

- 测量检查型:
  - 几何量:长度、角度、形状、位置、形变、面积、体积、距离。
  - 运动量：速度、加速度、振动
  - 表面形状：光洁度、庇病、伤痕
  - 工作过程：湿度、流量、压力、物位、PH值、浓度等
  - 机械量：重量、压力、应变、压强
  - 电学量：电流、电压、电场、磁场
  - 光学量：吸收、反射、透射、光度、色度、波长、光谱

- 控制跟踪型
  - 跟踪控制：激光制导，红外制导
  - 数值控制：自动定位，图形加工形成，数值控制
- 图象分析型
  - 图形检测
  - 图形分析

光电检测技术的特点

- 高精度：从地球到月球激光测距的精度达到1米。
- 高速度：光速是最快的。
- 远距离、大量程：遥控、遥测和遥感。
- 非接触式检测：不改变被测物体性质的条件下进行测量。
- 寿命长：光电检测中通常无机械运动部分，故测量装置寿命长，工作可靠、准确度高，对被测物无形状和大小要求。
- 数字化和智能化：强的信息处理、运算和控制能力。

光电检测方法

- 直接作用法
- 差动测量法
- 补偿测量法
- 脉冲测量法

光电检测技术发展趋势

- 纳米、亚纳米高精度的光电测量新技术。
- 小型、快速的微型光、机、电检测系统。
- 非接触、快速在线测量。
- 微空间三维测量技术和大空间三维测量技术。
- 闭环控制的光电检测系统，实现光电测量与光电控制一体化。
- 向人们无法触及的领域发展。
- 光电跟踪与光电扫描测量技术。

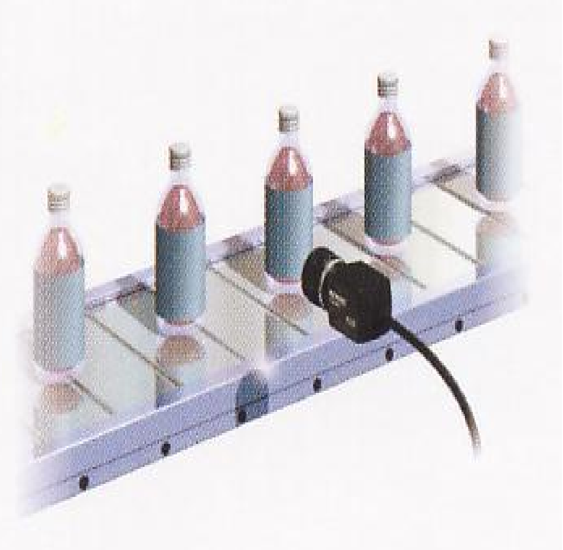
光电检测技术的应用

一、在工业生产领域的应用

在线检测：零件尺寸、产品缺陷、装配定位….

现代工程装备中，检测环节的成本约占50~70%

检查轴承／滚珠是否脱漏



检查容器内的液位

检测技术在汽车中的应用日新月异

汽车传感器：汽车电子控制系统的信息源，关键部件，核心技术内容

普通轿车：约安装几十到近百只传感器，

豪华轿车：传感器数量可多达二百余只。

发动机：向发动机的电子控制单元（**ECU**）提供发动机的工作状况信息，对发动机工作状况进行精确控制

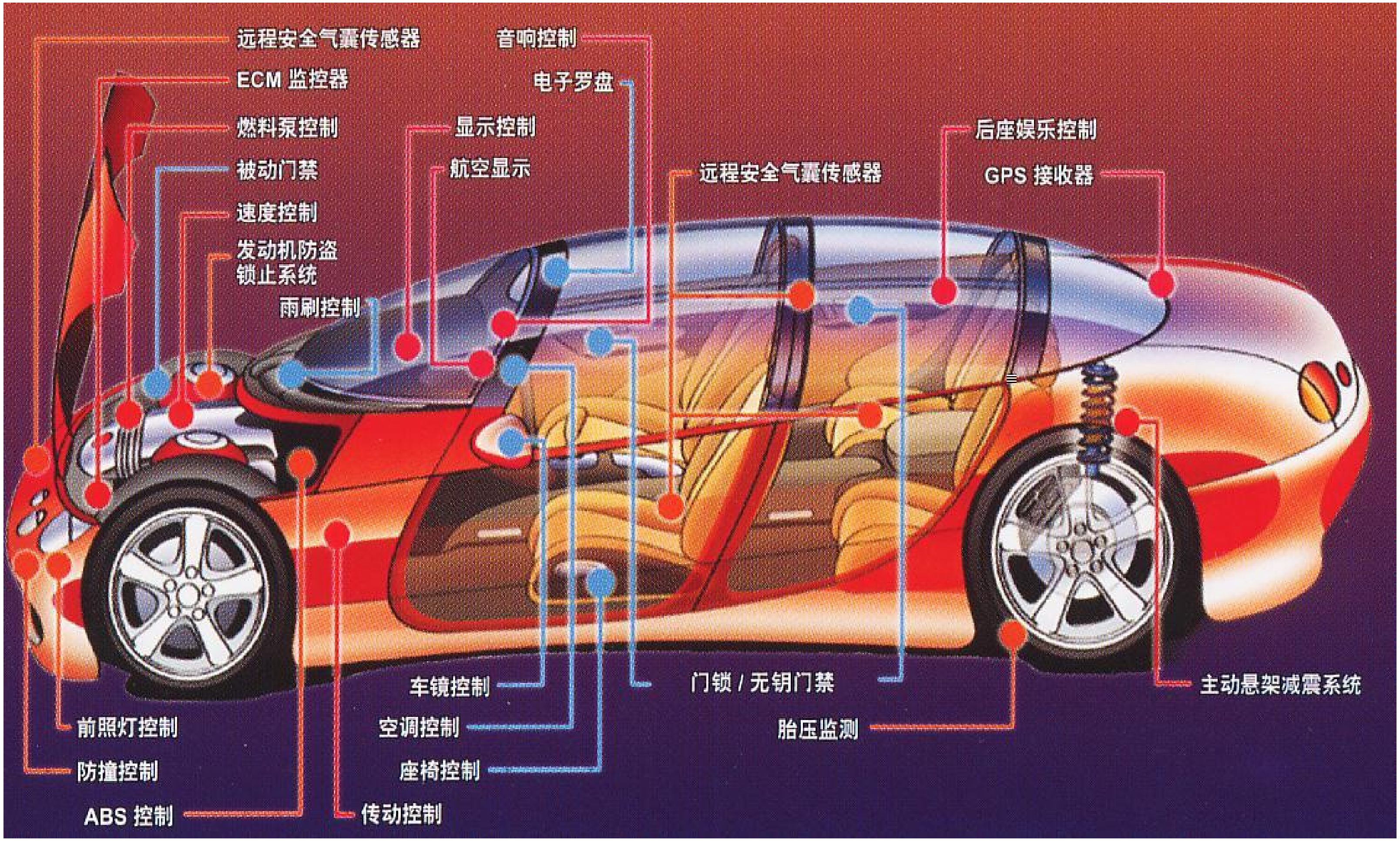
温度、压力、位置、转速、流量、气体浓度和爆震传感器等

底　盘：控制变速器系统、悬架系统、动力转向系统、制动防抱死系统等

车速、踏板、加速度、节气门、发动机转速、水温、油温

车　身：提高汽车的安全性、可靠性和舒适性等

温度、湿度、风量、日照、加速度、车速、测距、图象等



远程安全气囊传感器
ECM 监控器
燃料泵控制
被动门禁
速度控制
发动机防盗
锁止系统
雨刷控制
音响控制
电子罗盘
显示控制
航空显示
远程安全气囊传感器
后座娱乐控制
GPS 接收器
车镜控制
空调控制
座椅控制
门锁 / 无钥门禁
胎压监测
主动悬架减震系统
前照灯控制
防撞控制
ABS 控制
传动控制

二、检测技术在日常生活中的应用

家用电器：数码相机、数码摄像机：自动对焦---红外测距传感器

自动感应灯：亮度检测---光敏电阻

空调、冰箱、电饭煲：温度检测---热敏电阻、热电偶

电话、麦克风：话音转换---驻极电容传感器

遥控接收：红外检测---光敏二极管、光敏三极管

可视对讲、可视电话：图像获取---面阵CCD

办公商务：扫描仪：文档扫描---线阵CCD

红外传输数据：红外检测---光敏二极管、光敏三极管

医疗卫生：数字体温计：接触式---热敏电阻，非接触式---红外传感器

电子血压计：血压检测 --- 压力传感器

血糖测试仪、胆固醇检测仪 --- 离子传感器

三、检测技术在军事上的应用

美军研制的未来单兵作战武器

夜视瞄准机系统：非冷却红外传感器技术

激光测距仪：可精确的定位目标。

四、检测技术在国防领域的应用

美国国家导弹防御计划---NMD

1.地基拦截器

2.早期预警系统

3.前沿部署(如雷达）

4.管理与控制系统

5. 卫星红外线监测系统

监测系统: 探测和发现敌人导弹的发射并追踪导弹的飞行轨道;

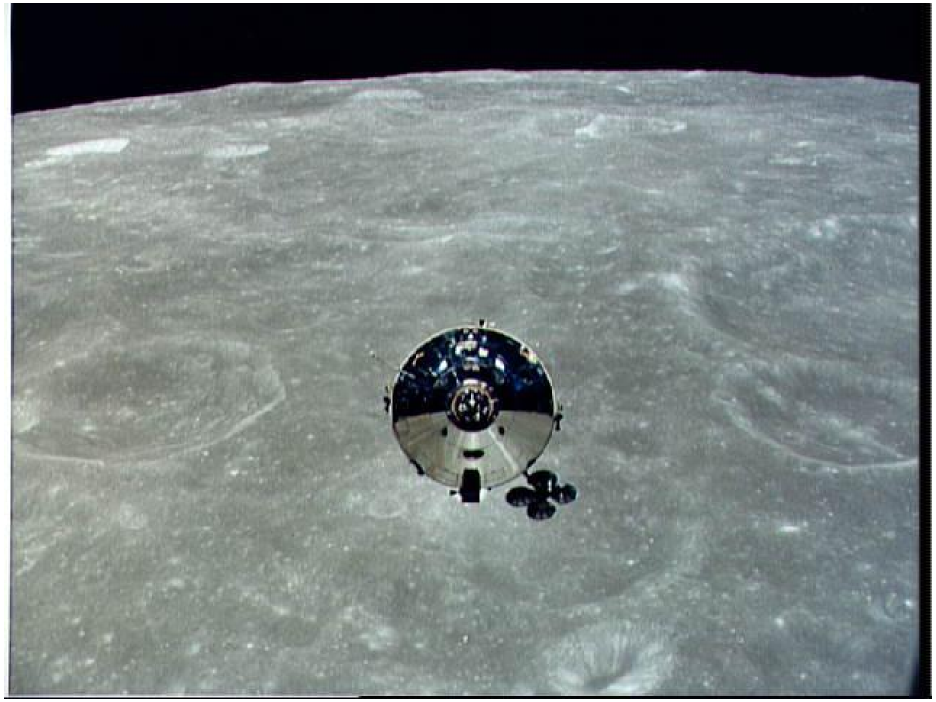
拦截器：能识别真假弹头，敌友方

五、检测技术在航天领域的应用

“阿波罗10”：

火箭部分---2077个传感器

飞船部分---1218个传感器



神州飞船：

185台（套）仪器装置

检测参数---加速度、温度、压力、 振动、流量、应变、 声学

学习本课程的目的

- 了解光电检测系统的基本组成，光电检测技术的特点和发展趋势。
- 掌握光电检测器件（传感器、光源和成像器件）的工作原理及基本特性，了解它们的应用范围。
- 能够根据特性参数，选择合适的光电检测器件。熟悉常用器件的性能指标。
- 掌握直接检测与外差检测的原理和区别。
- 了解光纤传感检测技术的原理和应用，掌握光纤的光波调制技术。
- 掌握了解常用光电检测技术的测量、数据采集、处理和转换的方法，了解所需的元器件、仪器和相关的接口技术。

高等光电系统与信号处理
信息光学部分

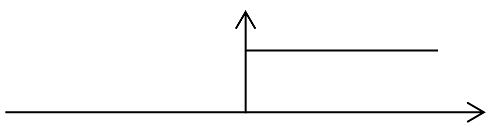
第一章 线性系统分析

- §1.1 常用数学函数
- §1.2 卷积与相关

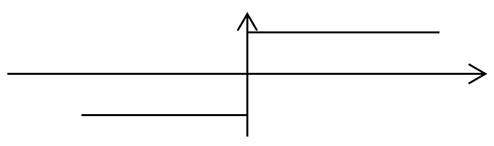
§1.1 常用数学函数

一、常见一维函数

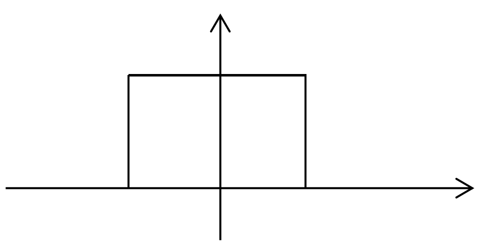
1. 阶跃(step)函数 $$\mathrm{step}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 1/2, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$$



2. 符号(signal)函数 $$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

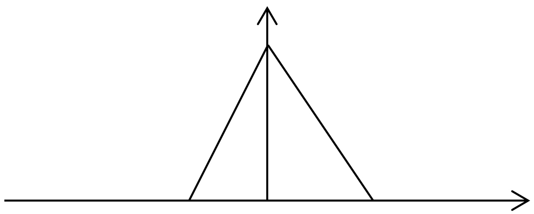


3. 矩形(rectangle)函数 $$\mathrm{rect}(x)=\begin{cases}1, & |x|\le \frac{1}{2}\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$



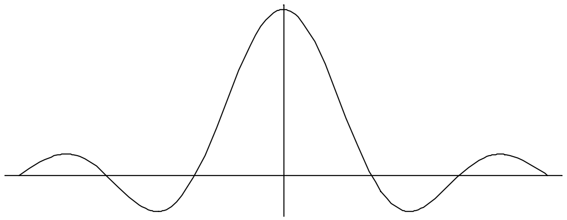
4.三角形(triangle)函数

$$\mathrm{tri}(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$



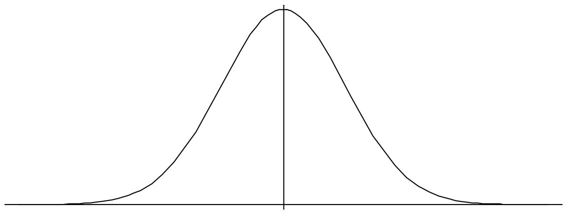
5.sinc函数

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



6.高斯(Gauss)函数

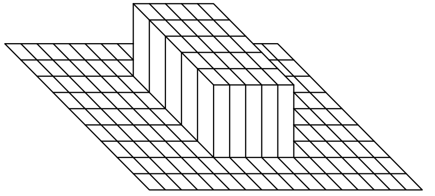
$$\mathrm{Gaus}(x)=\exp(-\pi x^2)$$



二、常见二维函数

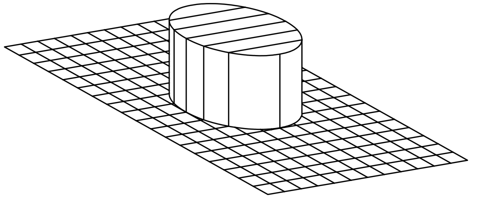
1. 二维矩形函数

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{b}\right)=\begin{cases}1, & |x/a|\le\frac{1}{2}\ \&\ |y/b|\le\frac{1}{2}\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$



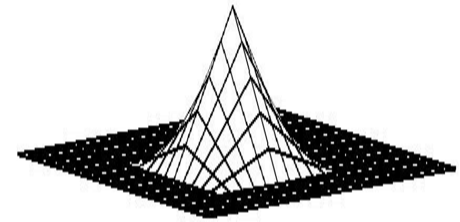
2. 圆域(circle)函数

$$\mathrm{circ(x)}=\begin{cases}1 & \sqrt{x^2+y^2}\le r_0\\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

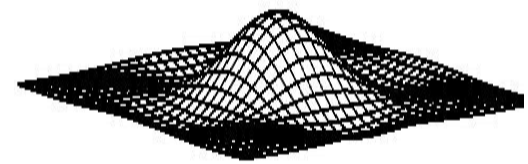


3. 二维三角函数

$$\mathrm{tri}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{tri}\left(\frac{y}{b}\right)=\begin{cases}\left(1-\left|\frac{x}{a}\right|\right)\left(1-\left|\frac{y}{b}\right|\right), & \left|\frac{x}{a}\right|\le 1\ \&\ \left|\frac{y}{b}\right|\le 1\\ 0, & \text{others}\end{cases}$$



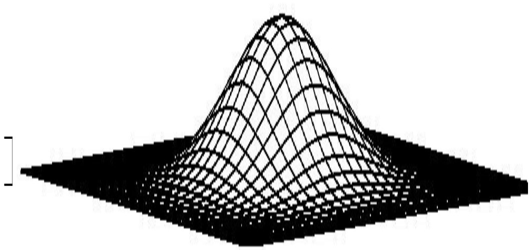
4. 二维sinc函数



$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{y}{b}\right)=\frac{\sin\left(\pi x/a\right)}{\pi x/a}\frac{\sin\left(\pi y/b\right)}{\pi y/b}$$

5. 二维高斯函数

$$\mathrm{Gaus}(x/a)\mathrm{Gaus}(y/b)=\exp[-\pi(x/a)^2)\exp[-\pi(y/b)^2]$$



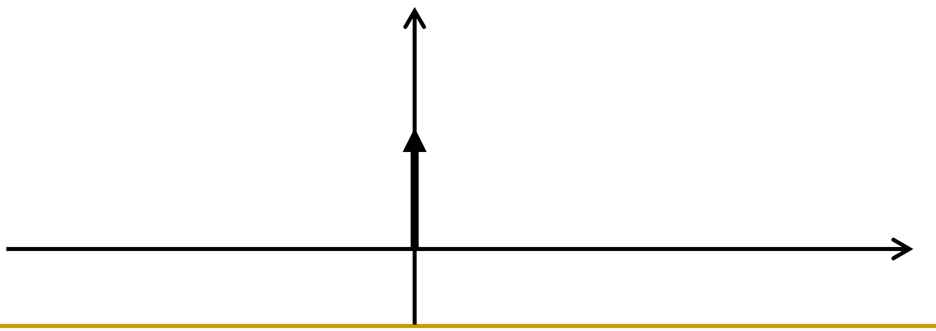
三、脉冲函数

1. δ函数

定义：（I） $\delta(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\text{时}\\ \infty & x=0\text{时}\end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

（II） $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)$



2. δ 函数的性质

（1）筛选性质 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

（2）δ函数是偶函数 $$\delta(-x) = \delta(x)$$

（3）比例变换性质 $$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

证：令 $ax=x'$, 则 $\quad x=\dfrac{x'}{a} \qquad dx=\dfrac{1}{a}dx'$

当 $a>0$, 根据筛选性质，有：

$$\int_{-\infty}^{d} f(x)\delta(ax)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{x}{a})\delta(x')\frac{1}{a}dx' = \frac{1}{a}f(x_0)$$

又有：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{a}\delta(x)dx == \frac{1}{a}f(x_0)$

比较两式得：$\delta(ax)=\dfrac{1}{a}\delta(x)$

同理得 $a<0$ 时 $\delta(ax)=-\dfrac{1}{a}\delta(x)$

综合以上两种情况，得：$\boxed{\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)}$

(4) 导数关系

I) $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx = -f'(0)}$$

证：
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\delta(x)\\ &= f(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)d\left[f(x)\right]\\ &= 0 - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f'(x)dx\\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx\\ &= -f'(0)\end{aligned}$$

II） $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\delta(x)dx = (-1)^{(n)} f^{(n)}(0)$

用数学归纳法证明，并注意 $\delta^{(n)}(\infty) = \delta^{(n)}(-\infty) = 0$

III） $\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n \delta^{(n)}(x)$

证：根据 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$ 有：

$$\delta^{(n)}(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\alpha)\delta(\alpha + x)d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha + x)\delta^{(n)}(\alpha)d\alpha$$

利用关系 II）可得 $= (-1)^{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\alpha + x)\delta\ (\alpha)d\alpha$

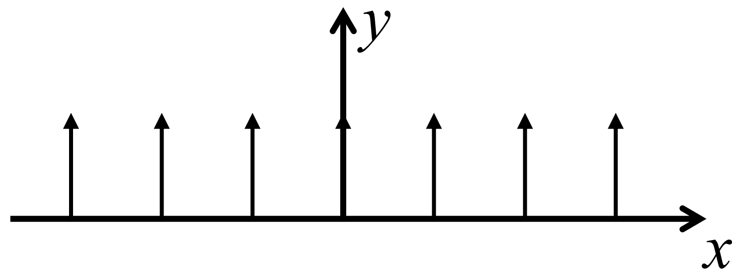
$$= (-1)^{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\alpha + x)\delta(\alpha - 0)d\alpha$$

$$= (-1)^{(n)} \delta^{(n)}(0 + x) = (-1)^{(n)} \delta^{(n)}(x)$$

3. 梳状函数

■定义

$$\mathrm{comb}(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$$



■间隔为τ的梳状函数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\tau)=\frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\frac{x}{\tau}-n)=\frac{1}{\tau}\mathrm{comb}(\frac{x}{\tau})$$

■等间距抽样

$$f(x)\times\frac{1}{\tau}\mathrm{comb}(\frac{x}{\tau})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\tau)\delta(x-n\tau)$$

§ 1.2 卷积与相关

一、卷积

1. 定义 $g(x)=f(x)\otimes h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x')h(x-x')dx'$

$g(x)$ 记作函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的卷积。

卷积的步骤：翻转 $h(x') \rightarrow h(-x')$

平移 $h(-x') \rightarrow h(x-x')$

相乘 $f(x')\times \mathrm{h}(x-\mathrm{x}')$

积分

2. 二维卷积 $g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta$

3．卷积的性质

(1) 线性运算：设a,b为任意常数，则

$$\left[af_1(x)+bf_2\right]\otimes h(x)=a\left[f_1(x)\otimes h(x)\right]+b\left[f_2(x)\otimes h(x)\right]$$

(2) 卷积符合交换律

$$f(x,y)\otimes h(x,y)=h(x,y)\otimes f(x,y)$$

(3)卷积具有平移不变性

若 $f(x,y)\otimes h(x,y)=g(x,y)$ 则

$$\begin{aligned} f(x-x_0,y-y_0)\otimes h(x,y) &= f(x,y)\otimes h(x-x_0,y-y_0) \\ &= g(x-x_0,y-y_0) \end{aligned}$$

(4) 卷积的结合律

$$[f(x,y)\otimes h_1(x,y)]\otimes h_2(x,y)=f(x,y)\otimes[h_1(x,y)\otimes h_2(x,y)]$$

(5)卷积的坐标缩放性

设 $f(x,y)\otimes h(x,y)=g(x,y)$ 则

$$f(ax,by)\otimes h(ax,by)=\frac{1}{|ab|}g(ax,by)$$

(6)函数$f(x,y)$与δ函数的卷积

$$f(x,y)\otimes\delta(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha,\beta)\delta(x-\alpha,y-\beta)d\alpha d\beta=f(x,y)$$

$$f(x,y)\otimes\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x-x_0,y-y_0)$$

4.卷积的效应

- 展宽

  一般说来，卷积的宽度等于被卷积函数之和

- 平滑化

  卷积后的函数本身的起伏振荡变得平缓圆滑

二、相关运算

1. 互相关 $$r_{fg}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int f(\xi,\eta)g^*(\xi-x,\eta-y)d\xi d\eta$$

$$=f(x,y)\star g(x,y)$$

令 $\xi-x=\xi',\eta-y=\eta'$ 代入上式

$$r_{fg}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int f(\xi+x,\eta+y)g^*(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$=f(x,y)\star g(x,y)$$

一般地 $f(x,y)\star g(x,y)\neq g(x,y)\star f(x,y)$

互相关与卷积的关系 $f(x,y)\star g(x,y)=f(x,y)\otimes g^*(-x,-y)$

证明 $$f(x,y)\star g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)g^*(\xi-x,\eta-y)d\xi d\eta$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)g^*(\frac{x-\xi}{-1},\frac{y-\eta}{-1})d\xi d\eta$$
$$=f(x,y)\otimes g^*(-x,-y)$$

- 只有当g为实的偶函数时，$f(x,y)\star g(x,y)=f(x,y)\otimes g(x,y)$
- 计算互相关时要注意两个函数的顺序。
- 互相关运算是两个信号之间存在多少相似性的量度。

2. 自相关

$$r_{ff} = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta) f^{*}(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta = f(x,y) \star f(x,y)$$

自相关函数的性质

- 厄米性 $$r_{ff}(x,y) = r^{*}(-x,-y)$$
- 原点相关极大 $$\left| r_{ff}(x,y) \right| \le r_{ff}(0,0)$$

其证明利用到施瓦兹不等式：

对于任意两个函数 $g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)$

$$\left|\int\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi,\eta)h(\xi,\eta)d\xi d\eta\right|^2 \leq \int\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(\xi,\eta)\right|^2 d\xi d\eta \times \int\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\xi,\eta)\right|^2 d\xi d\eta$$

再令$g(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)$，$h(\xi,\eta)=f^*(\xi-x,\eta-y)$，即可得证。

- **§1.3 傅立叶级数与傅立叶变换**

§1.3 傅立叶级数与傅立叶变换

一、正交矢量与正交函数系

1. 正交矢量

（1）三维空间 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1;\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

（2）N维空间 $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\cdots,\vec{V}_N$

$$\vec{V}_m\cdot\vec{V}_n=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n\end{cases}$$

2.正交函数系

定义域在[X1,X2]的函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\cdots\varphi_N(x)$

（1）正交 $\int_{X_1}^{X_2}\varphi_m(x)\varphi_n^*(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \mu_m, & m=n\end{cases}$

（2）标准正交系 $\mu_m=1$

（3）任意函数可以用正交函数系展开

$$f(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$$

$$c_n=\frac{1}{\mu_n}\int_{X_1}^{X_2}f(x)\varphi_n^*(x)dx$$

（4）完备系

几个例子

余弦函数系

$$\varphi_n(x) = \sin(2\pi \times nf_0 x), \quad n = 0,1,2,3,\cdots$$

$$\varphi_n(x) = \cos(2\pi \times nf_0 x), \quad n = 0,1,2,3,\cdots$$

复指数系

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= e^{i2\pi \times nf_0 x} = \exp[i2\pi \times nf_0 x] \\ &= \cos(2\pi \times nf_0 x) + i\sin(2\pi \times nf_0 x)\end{aligned}$$

二、傅里叶级数

1.三角傅立叶级数

一个以τ为周期的函数$g(x)$ ，满足狄利克雷条件：
(1)全空间可积；
(2)有限个间断点，有限个极值；
(3)没有无穷大的间断点。

（物理上的可能）

则$g(x)$可展成傅里叶级数

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2\pi nf_0x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2\pi nf_0x)$$

其中频率 $f_0=\dfrac{1}{\tau}$,

系数 $a_n=\dfrac{2}{\tau}\int_0^{\tau}g(x)\cos(2\pi nf_0x)dx$,

$$b_n=\frac{2}{\tau}\int_0^{\tau}g(x)\sin(2\pi nf_0x)dx,$$

$$n=1,2,\cdots$$

$$\boxed{g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(2\pi nf_0x)+b_n\sin(2\pi nf_0x)]}$$

而 $a_n\cos(2\pi nf_0x)+b_n\sin(2\pi nf_0x)=B_m\cos(2\pi f_0x+\varphi_m)$

$$B_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad tg\varphi_n=-\frac{b_n}{a_n}$$

$$\boxed{g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(2\pi nf_0x+\varphi_n)}$$

（讨论：函数g的奇偶性对各傅立叶展开系数的影响？）

2.指数函数的傅立叶变换

指数函数系 $\exp(i2\pi \times nf_0 x)$

任意函数的展开 $$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i2\pi nf_0 x)$$

其中系数 $$c_n=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} g(x)\exp(-i2\pi nf_0 x)dx$$

3.三角函数系----指数系的关系

$$g(x)=\frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp(i2\pi nf_0x)$$

$$=\frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n[\cos(2\pi nf_0x)+i\sin(2\pi nf_0x)]$$

$$=\frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cos(2\pi nf_0x)+\frac{i}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\sin(2\pi nf_0x)$$

$$=\frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}(c_n+c_{-n})\cos(2\pi nf_0x)+\frac{i}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}(c_n-c_{-n})\sin(2\pi nf_0x)$$

系数关系 $$a_n=\frac{c_n+c_{-n}}{2},\quad b_n=i\frac{c_n-c_n}{2}$$

三、傅里叶变换

①离散→连续：周期增大，频率密集
②非周期函数:→延拓成周期函数,或认为其周期为∞

1. 傅里叶变换：$g(x) \rightarrow G(f)$

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp[-i2\pi fx]dx$$

2. 傅里叶逆变换：$G(f) \rightarrow g(x)$

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\exp[i2\pi fx]df$$

光学中， $f=\dfrac{1}{\lambda},\quad 2\pi f=\dfrac{2\pi}{\lambda}=k,$

$$G(k)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\exp[-ikx]dx$$

二维情形

$$G(f_x,f_y)=\iint_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\exp[-i2\pi f_x x-i2\pi f_y y]dxdy$$

$$g(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}G(f_x,f_y)\exp[i2\pi f_x x+i2\pi f_y y]df_x df_y$$

3. 广义傅里叶变换

如 $g(x)=1$，可近似为 $g(x)=\lim_{\tau\to\infty}\mathrm{rect}(\frac{x}{\tau})$

$$G(f)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\exp[-i2\pi fx]dx=\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\tau\,\mathrm{sinc}(f\tau)=\delta(f)$$

傅里叶变换的形式表示

$$G(f)=F\{g(x)\}$$

$$g(x)=F^{-1}\{G(f)\}$$

$$G(f_x,f_y)=F\{g(x,y)\}$$

$$g(x,y)=F^{-1}\{G(f_x,f_y)\}$$

$$\boxed{F\{\lim_{\tau\to\infty}\mathrm{rect}(\frac{x}{\tau})\}=F\{1\}=\delta(f)}$$

4.傅里叶变换的性质与定理

(1)性质

①共轭性 若$g(x)$实数函数，$G(f)=G^*(f)$亦为实函数

②奇偶性 如果$g(x)$是实值偶函数，$G(f)$亦为实值偶函数
如果$g(x)$是实值奇函数，$G(f)$亦为实值奇函数

(2)定理

①线性定理

$$F\{\alpha\, g(x,y)+\beta\, h(x,y)\}=\alpha\, F\{g(x,y)\}+\beta\, F\{h(x,y)\}$$

②相似性定理

$$F\{g(ax,by)=\frac{1}{|ab|}G(\frac{f_x}{a},\frac{f_y}{b})\}$$

③位移定理

$$F\{g(x-a,y-b)=G(f_x,f_y)\exp[-i2\pi(f_x a+f_y b)]$$

④帕色伐定理

$$\iint |g(x,y)|^2\, dxdy = \iint |G(f_x, f_y)|^2\, df_x df_y$$

⑤卷积定理

$$F\{g(x,y) \otimes h(x,y)\} = F\{g(x,y)\} F\{h(x,y)\}$$

⑥自相关定理

$$F\{g(x,y) \bigstar g(x,y)\} = |G(f_x, f_y)|^2$$

⑦傅里叶积分定理

$$F^{-1}F\{g(x,y) = FF^{-1}\{g(x,y)\} = g(x,y)$$

5.傅里叶-贝赛尔函数

极坐标：轴对称函数 $g(x,y) \to g(r,\theta)$

$$G(f_x, f_y) = \iint g(x,y)\exp[-i2\pi(f_x x + f_y y)]dxdy$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\theta$$

$$\theta = arctg(\frac{y}{x}), \quad y = r\sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}, \ f_x = \rho\cos\phi$$

$$\phi = arctg(\frac{f_y}{f_x}), \ f_y = \rho\sin\phi$$

则

$$G(\rho,\phi)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}g(r)\exp[-i2\pi r\rho\cos(\theta-\phi)]rdr$$

$$=\int_0^{\infty}g(r)rdr\int_0^{2\pi}\exp[-i2\pi r\rho\cos(\theta-\phi)]d\theta$$

利用贝赛尔函数的性质 $J_0(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp[-ia\cos(\theta-\phi)]d\theta$

$$G(\rho)=2\pi\int_0^{\infty}rg(r)J_0(2\pi r\rho)dr$$

6. 常用的傅里叶变换对

（1） δ 函数的变换$F\{\delta(x)\}=1$

δ 函数的筛选性质：$F\{\delta(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\exp[-i2\pi fx]dx$

$$=\exp[-i2\pi fx]\big|_{x=0}$$

$$=1$$

（2）常数的变换 $F\{A\}=A\delta(f)$

（3）$\delta(x+x_0)$ 的变换 $F\{\delta(x+x_0)\}=\exp[i2\pi fx_0]$

（4）$\exp[i2\pi f x_0]$ 的变换 $F\{\exp[i2\pi f_0 x]\} = \delta(f - f_0)$

（5）$\cos(2\pi f_0 x)$ 的变换

$$F\{\cos(2\pi f_0 x)\} = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

$$F\{\cos(2\pi f_0 x)\} = F\{\frac{1}{2}(\exp[i2\pi f_0 x] + \exp[-i2\pi f_0 x])\}$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

（6）矩形函数的变换 $F\{\mathrm{rect}(x)\}=\mathrm{sinc}(f)$

（7）三角函数的变换，$F\{\mathrm{tri}(x)\}=\mathrm{sinc}^2(f)$

§1.4 线性系统分析

特殊函数的傅里叶变换

(1) 利用傅里叶变换可逆

(2)特殊函数

三角函数 $$F\{\mathrm{Tri}(x)\} = \mathrm{sinc}^2 f$$

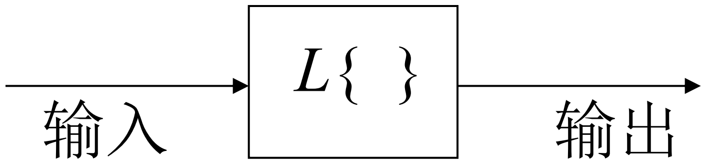
高斯函数 $$F\{\exp[-\pi x^2]\} = \exp[-\pi x^2]$$

§1.4 线性系统分析

一个非随机的固定系统，给定一个输入函数，必定对应一个确定的输出函数。系统的作用可用一个算符$L\{\ \ \}$来表示：

$$g(x,y)=L\{f(x,y)\}$$

从数学上来看，系统代表一种变换。只要变换的结果相同，则可以不管系统内部的结构如何，对外界系统的作用是相同的，则系统的作用可用一个黑箱来类比。



一般地说：对于任意的系统，输入函数与输出函数的关系是极为复杂的，具体地指出变换算符**L{ }**的具体形式和性质是十分困难的。

一、线性系统

若对所有的输入函数 $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$ 和复常数 a_1, a_2，输出满足下列关系式：

$$L\{a_1 f_1(x,y) + a_2 f_2(x,y)\} = a_1 L\{f_1(x,y)\} + a_2 L\{f_2(x,y)\}$$

则称系统为**线性系统**。

组合的响应（变换）$\xrightarrow{\text{化为}}$ 响应（变换）的组合

如果能把总输入函数分解成各个“基元函数”f_1, f_2 与相应的复常数a_1, a_2 的乘积的总和，那么线性系统的总输出函数就等于各个基元函数的输出函数与相应的复常数的乘积的总和，而不管输入函数是多么的复杂。所以系统对基元函数的响应显然反映了系统的性质。

找出比较适合线性系统的基元函数

在光学上，

$$\begin{cases} \text{指数函数 } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \longrightarrow \text{平面波} \\ \delta \text{函数} \qquad\qquad \longrightarrow \text{点基元} \end{cases}$$

系统的特点：

1、叠加性：指系统中一个输入并不影响其它输入的响应

2、均匀性：指系统能够保持对输入信号的缩放因子不变

二、线性系统的脉冲响应

设 $f(x,y)$ 为一线性系统的输入函数，可以将其看作为 xy 平面上不同位置出的许多 函数的线性组合。即：

$$f(x_1,y_1)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)d\xi d\eta$$

通过线性系统后，其输出函数为：

$$\begin{aligned}
g(x_2,y_2) &= L\{f(x_1,y_1)\} \\
&= L\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)d\xi d\eta\right\} \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)\times L\{\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)\}d\xi d\eta \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)h(x_2,y_2;\xi,\eta)d\xi d\eta
\end{aligned}$$

其中 $$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = L\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}$$

称为系统的脉冲响应。

表示在系统的输出平面(x_2, y_2)点处，由系统的输出平面上坐标为(ξ, η)点的 δ 函数所激励的响应。

上式表明：线性系统的性质完全由脉冲响应函数来决定，对于已知的系统$h(x_2, y_2; \xi, \eta)$，任何输入函数所对应的输出函数都可以用上述积分求出。

物理意义：

对于一个线性成像系统，只要知道了物场中各点的像，则任何物的像便可求出。

三、线性不变系统：时间不变系统 空间不变系统

①时间不变系统：

不同时间输入同一信号，其输出信号（函数）形式不变。即对于相同的输入信号，其输出信号不随输入时间的改变而改变。

②空间不变系统：

不因信号的位置不同而使输出有所改变，任何位置的信号的输出都不变形（失真）。

1. 线性不变系统的定义。

输入 $f(x,y)$，通过系统后，其输出为 $g(x,y)$，即：

$$g(x_2,y_2)=L\{f(x_1,y_1)\}$$

如果$f(x,y)$有一位移 (ξ,η)，其输出的函数形式不变。

考察脉冲响应：对于位于原点的δ函数，其响应为$h(x,y)$，

$$h(x,y)=L\{\delta(x,y)\}$$

偏离原点时，即$\delta\left(x_1-\xi,y_1-\eta\right)$，其响应为

$$h\left(x_2-\xi,y_2-\eta\right)$$

系统既是线性系统又是空间不变系统，称为线性空不变系统。对于空间不变系统，它的输入和输出的变换关系是不随空间位置的变化而变化的。

实际上，对于点光源的函数，其响应是有一定分布的，叫做弥散，与日晕和月晕相似，但只要不随空间变化这种特性就称为等晕性。

2. 线性不变系统的叠加积分----卷积

由线性系统积分式有：

$$g(x_2,y_2)=\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)h(x_2,y_2;\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)h(x_2-\xi,y_2-\eta)\,d\xi d\eta$$

$$=f(x_2y_2)\otimes h(x_2,y_2)$$

说明：输出函数 $g(x,y)$ 等于输入函数 $f(x,y)$ 与系统脉冲响应的卷积。

卷积的物理意义：

　　将输入函数分解为许多不同位置的函数的线性组合，每个脉冲按其位置不同分别加权然后叠加起来，就得出系统对输入函数的整体响应。

注意：与线性叠加的意义相似，不同的是它不随位置变化而变化----线性空不变。

3. 线性不变系统的传递函数

对 $g(x,y)=f(x,y)\otimes h(x,y)$ 取傅氏变换得：

$$F\{g(x,y)\}=F\{f(x,y)\otimes h(x,y)\}$$

得：
$$G(f_x,f_y)=F(f_x,f_y)H(f_x,f_y)$$

式中：
$$H(f_x,f_y)=F\{h(x,y)\}$$
$$=\iint_{-\infty}^{\infty}h(x,y)\exp[-i2\pi(f_x x+f_y y)]dxdy$$

称为系统的传递函数→亦称为频率响应函数。

输出频谱$G(f_x, f_y)$等于输入频谱$F(f_x, f_y)$与传递函数$H(f_x, f_y)$的乘积。

则：

$$g(f_x, f_y) = F^{-1}\{G(f_x, f_y)\}$$

即输出函可通过求$G(f_x f_y)$的逆变换得出。把繁复的卷积运算变成简单的乘积运算。

f_x, f_y -----------空间频谱，空间频率

4. 线性不变系统的本征函数

------什么样的函数会是线性不变系统的解

本征函数

设$f(x,y,f_a,f_b)$为输入函数，若输出为

$$L\{f(x,y;f_x,f_y)\}=H(f_a,f_b)f(x,y;f_a,f_b)$$

特点：输出与输入的函数形式不变，则称

$f(x,y,f_a,f_b)$----------系统的本征函数，

$H(f_a,f_b)$ ----------本征函数的本征值。

一个线性不变系统的本征函数，通过系统后不改变函数形式，只是被衰减或放大和产生相移。
问题是：什么样的函数可以作为线性空间不变系统的本征函数呢？

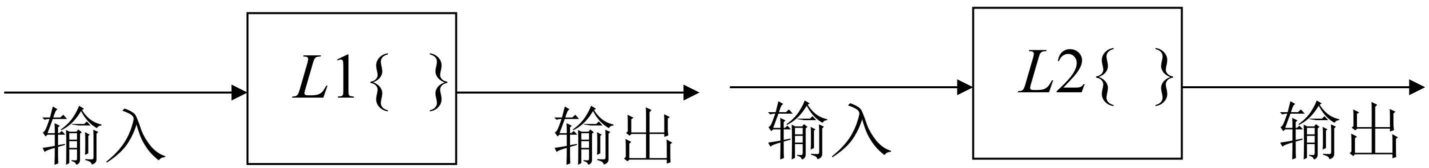
复指数函数：相干系统

$$f(x,y)=\exp\left[i2\pi\left(f_x x+f_y y\right)\right]$$

实值函数：非相干系统

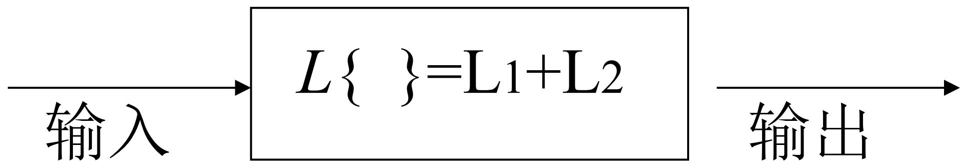
$$f(x,y)=\cos\left[2\pi\left(f_a x+f_b y\right)\right]$$

5.级联系统



$$g_1(x,y)=f_1(x,y)\otimes h_1(x,y),\quad g_2(x,y)=f_2(x,y)\otimes h_2(x,y)$$

$$\begin{aligned}g_2(x,y)&=f_1(x,y)\otimes h_1(x,y)\otimes h_2(x,y)\\&=f_1(x,y)\otimes[h_1(x,y)\otimes h_2(x,y)]\\&=f_1(x,y)\otimes h(x,y)\end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
G_2(f_x, f_y) &= F_1(f_x, f_y)H_1(f_x, f_y)H_2(f_x, f_y) \\
&= F_1(f_x, f_y)[H_1(f_x, f_y)H_2(f_x, f_y)] \\
&= F_1(f_x, f_y)H(f_x, f_y)
\end{aligned}
$$

第一章　总结

- 数学卷积与相关运算
- 傅里叶变换
- 线性系统分析：线性空不变系统

第二章 标量衍射理论

- §2.1 光波的数学描述
- §2.2 基尔霍夫衍射理论

§2.1 光波的数学描述

一、单色光波场的复振幅表示

1. 定态光场（稳定的光场分布）

要求光波的波列无限长，实际上是不存在的。因此，当光波波列的持续时间比光扰动的周期长得多时，可以将这种光波波列当作无限长单色波列处理。

单色光波场中P点在t时刻振动的标量函数表示为：

$$u(P,t) = a(P)\cos\left[\omega t - \varphi(P)\right]$$

根据欧拉公式，写成指数形式，并取实部为：

$$u(P,t) = \mathrm{Re}\{a(P)\exp[-i\omega t + i\varphi(P)]\}$$

$$= \mathrm{Re}\{\underbrace{a(P)\exp[i\varphi(P)]}_{\text{复振幅}}\exp[-i\omega t]\}$$

1）定义单色光波场中P点的复数振幅

$$U(P) = a(P)\exp[i\varphi(x,y,z)]$$

光振动 $$u(P,t) = \mathrm{Re}\{U(P)\exp[-i\omega t]\}$$

2）单色波光场的复振幅计算

线性运算（加 减 乘 除）更为方便

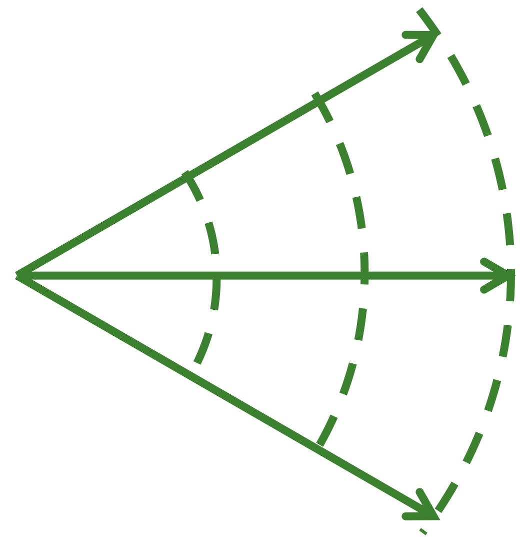
取实部即为实数表达式

强度计算 $$I = |U|^2 = U^* U$$

二、球面波

1. 单色球面波的复振幅

(1) 发散波：$\vec{k}\cdot\vec{r}=kr,\quad \vec{k}$ 与 $\vec{r}$ 一致

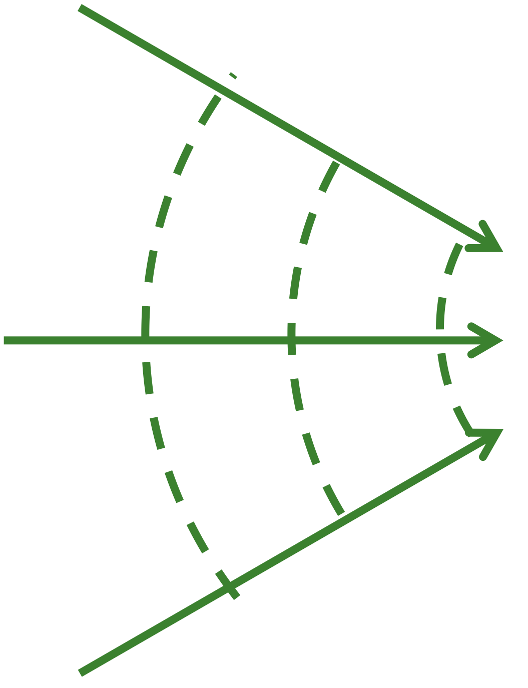


$$U(x,y,z,t)=\frac{a}{r}\exp[-i\omega t+ikr]$$
$$=U(x,y,z)\exp[-i\omega t]$$

式中： $$U(x,y,z,t)=\frac{a}{r}\exp[ikr]$$

（2）会聚波： $\vec{k}$ 与 $\vec{r}$ 反向 $\vec{k}\cdot\vec{r}=-kr,$

$$U(x,y,z,t)=\frac{a}{r}\exp[-i\omega t-ikr]$$
$$=U(x,y,z)\exp[-i\omega t]$$



式中： $$U(x,y,z)=\frac{a}{r}\exp[-ikr]$$

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

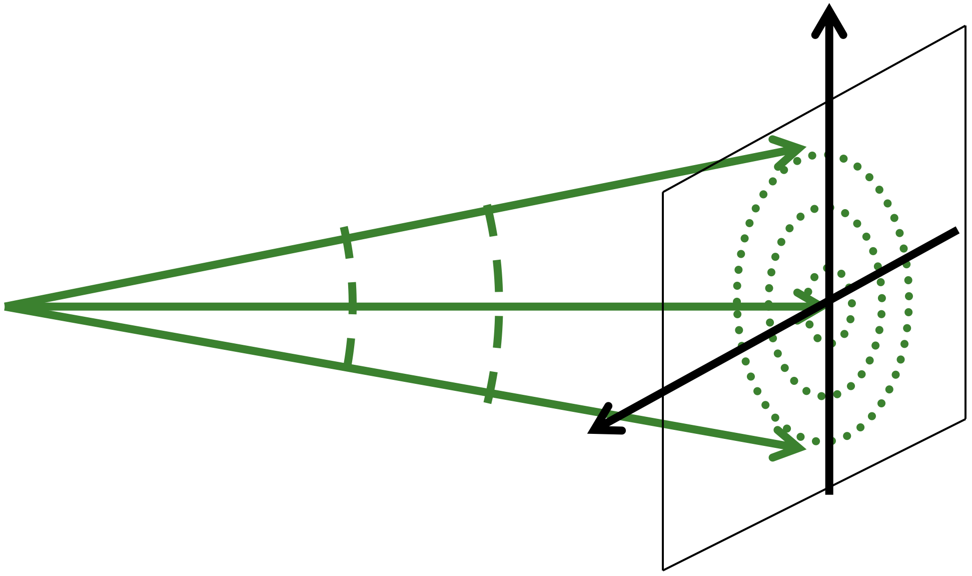
（空间两点间的距离公式）

(2) 球面波光场中任一平面上的复振幅分布

设球面波中心与坐标原点重合，则(x, y)平面上的复振幅为

$$U(x, y, z) = \frac{a}{r}\exp[ikr]$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}$$



在近轴情况下，即 $z^2 >> x^2 + y^2$ 可按牛顿二项式展开处理。

根据 $$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\dots\dots$$

得 $$r=z\left[1+\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{z^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)^2+\dots\dots\right]$$

处理：对于 $U(x,y,z)$ 的振幅部分，取 $r\approx z$

对于 $U(x,y,z)$ 的位相部分，取

$$r\approx z\left(1+\frac{x^2+y^2}{2z^2}\right)$$

将以上近似结果代入 $U(x,y,z)$ 式得：

$$U(x,y,z) \approx \frac{a}{z}\exp(ikz)\cdot\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

$$= U_0\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

$$\boxed{U_0 = \frac{a}{z}\exp[ikz]}$$

若球面波中心不在坐标原点，上式改为：

$$U(x,y,z) = U_0\exp\left[ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right]$$

三、平面波

1. 单色平面波的公式（沿k方向传播）

$$u(x,y,z,t)=a\exp[-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}]=U(x,y,z)\exp[-i\omega t]$$

式中复振幅为：

$$U(x,y,z)=a\exp[i\vec{k}\cdot\vec{r}]$$

$$=a\exp\left[ik\left(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\right)\right]$$

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$$

令 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=C$，等相面是一些平行平面

2. 任一平面上的平面波表示式

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$$

距离z上的平面上的复振幅可写为：

$$U(x,y,z) = a\exp(ikz\cos\gamma)\exp\left[ik(x\cos\alpha+y\cos\beta)\right]$$

$$= a\exp\left(ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\right)\exp\left[ik(x\cos\alpha+y\cos\beta)\right]$$

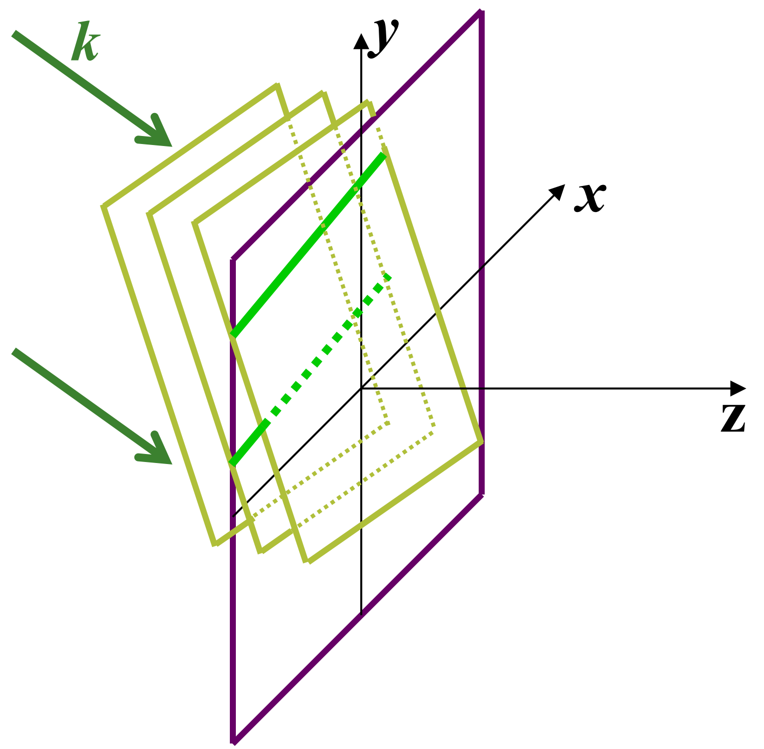
$$= U_0\exp\left[ik(x\cos\alpha+y\cos\beta)\right]$$

其中 $\boxed{U_0 = a\exp[ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}]}$

考察平面z上的相位 $x\cos\alpha + y\cos\beta = C$

可见，等相位线是一些平等线，斜率为 $-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

相位差为 2π 的
等相面和等相线



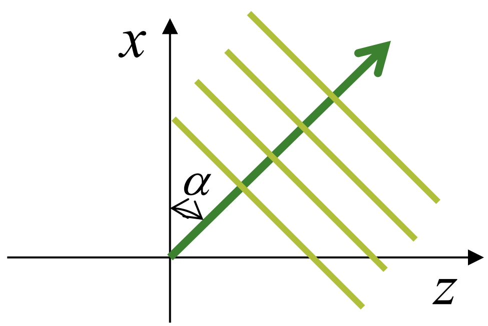
四、平面波的空间频率

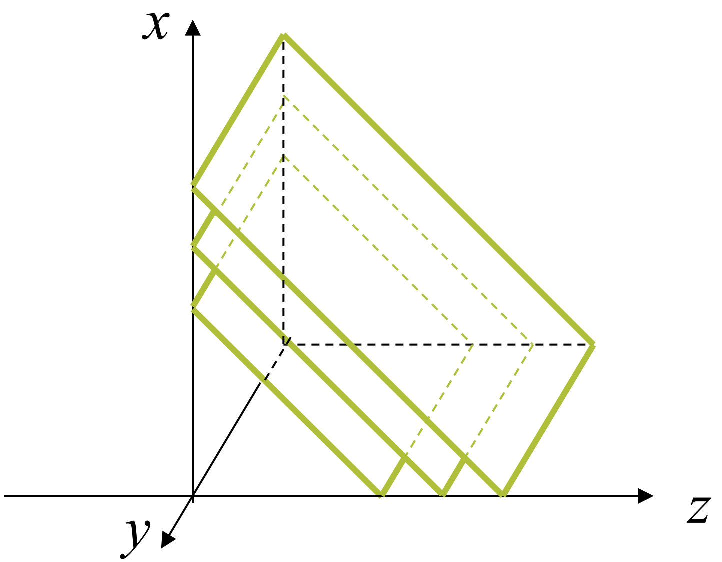
1. 研究平面光波矢量位于(x, z)平面内的情形。

$$\cos\beta = 0$$

复振幅 $U(x,y) = A\exp[ikx\cos\alpha]$

等相位线 $x\cos\alpha = C$



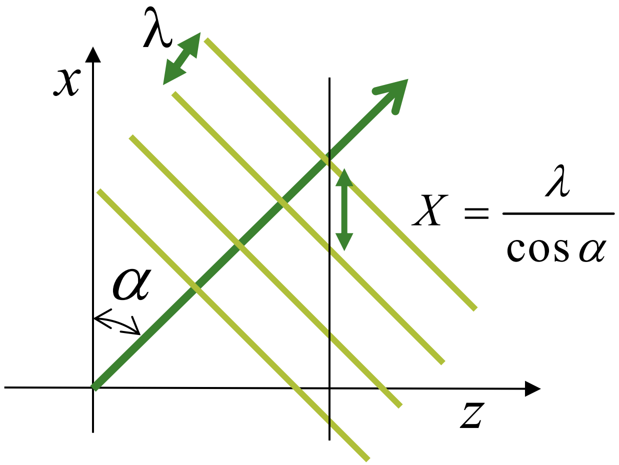


相位差为 2π 的
等相面和等相线

相位差为2π的等相线 $kX\cos\alpha = 2\pi$

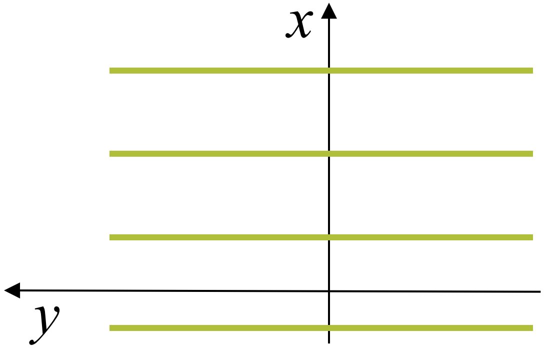
x方向等相线间距 $X = \dfrac{2\pi}{k\cos\alpha} = \dfrac{\lambda}{\cos\alpha}$

x方向空间频率 $f_x = \dfrac{1}{X} = \dfrac{\cos\alpha}{\lambda}$



y方向等相线间距 $Y=\infty$

y方向空间频率 $f_y=0$



传播方向余弦 $(\cos\alpha, 0)$ $\rightarrow$ 空间频率 $(f_x = \dfrac{\cos\alpha}{\lambda}, f_x = 0)$

复振幅改写为 $U(x, y) = A\exp[i2\pi f_x x]$

2. 任意情形的空间频率

光波是时间和空间的函数，具有时间周期性与空间周期性。

对于单色光波

时间量	空间量
时间角频率 $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$	空间角频率 $K = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{\lambda}$
ν ----时间频率	λ -----空间周期
T ----时间周期	f ---空间频率

$$\vec{k} = k\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}, \ \vec{r} = \{x, y, z\}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$$

代入复振幅表达式：

$$U(x,y,z) = u(x,y,z)\exp\left[ik(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\right]$$

$$= u(x,y,z)\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x + \frac{\cos\beta}{\lambda}y + \frac{\cos\gamma}{\lambda}z\right)\right]$$

$$= u(x,y,z)\exp\left[i2\pi\left(f_x x + f_y y + f_z z\right)\right]$$

式中： $f_x = \dfrac{\cos\alpha}{\lambda}$， $f_y = \dfrac{\cos\beta}{\lambda}$， $f_z = \dfrac{\cos\gamma}{\lambda}$

讨论：

① 当 $\alpha,\beta,\gamma<90^0$ 时，$f_x,f_y,f_z>0$ ，表示 $\vec{k}$ 沿正方向传播；

当 $\alpha,\beta,\gamma>90^0$ 时，$f_x,f_y,f_z<0$ ，表示 $\vec{k}$ 沿负方向传播。

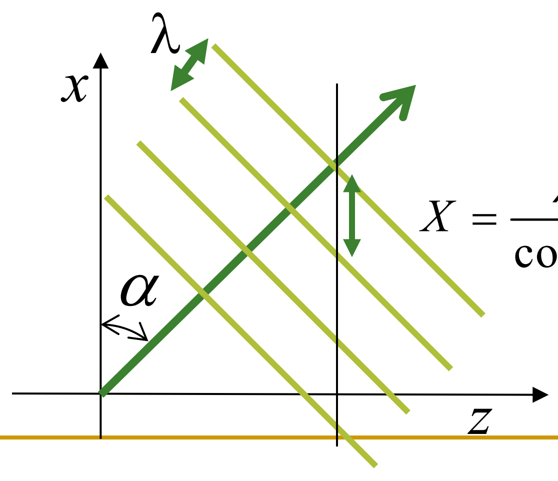
②标量性　　当 $\alpha\uparrow$ 时，$\cos\alpha\downarrow\rightarrow f_x\downarrow\rightarrow X\uparrow$；

当 $\alpha\downarrow$ 时，$\cos\alpha\uparrow\rightarrow f_x\uparrow\rightarrow X\downarrow$；

③标量性与矢量性的联系

条纹密 $X\downarrow\rightarrow f_x\uparrow\rightarrow\alpha\downarrow$

条纹疏 $X\uparrow\rightarrow f_x\downarrow\rightarrow\alpha\uparrow$



$$X=\frac{\lambda}{\cos\alpha}$$

五、复振幅分布的空间频率—角谱

傅里叶分解 $$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}A(f_x,f_y)\exp[i2\pi(f_x x+f_y y)]df_x df_y$$

$$U(x,y)\quad\rightarrow\quad A(f_x,f_y)$$

傅里叶变换 $$A(f_x,f_y)=\iint_{-\infty}^{\infty}U(x,y)\exp[-i2\pi(f_x x+f_y y)]dxdy$$

$$f_x=\frac{\cos\alpha}{\lambda},f_y=\frac{\cos\beta}{\lambda}$$

角谱 $$A(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda})=\iint_{-\infty}^{\infty}U(x,y)\exp[-i2\pi(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y)]dxdy$$

§2.2 基尔霍夫衍射理论

衍射:
索末菲定义：不能用反射或折射来解释的光线对直线光路的任何偏离

惠更斯—菲涅尔定义：光波在传播过程中波面受到限制，使自由完整的波面产生破缺的现象

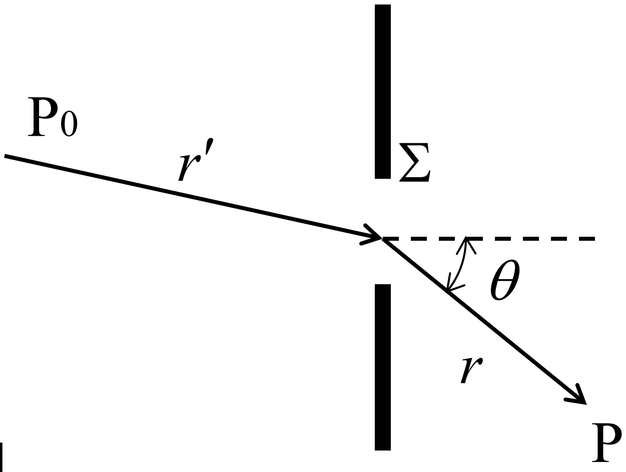
现代定义：光波在传播过程中不论任何原因导致波前的复振幅分布（包括振幅分布和位相分布）的改变，使自由传播光场变为衍射光场的现象，都称为衍射。

一、惠更斯-菲涅尔原理

- 1678年，惠更斯为解释波的传播提出子波的假设，认为波面上每一点都可以作为次级子波的波源，后一时刻的波阵面则可看作是这些子波的包络面

- 1818年，菲涅耳引入干涉概念对惠更斯原理进行了补充，认为子波源应当是相干的，后空间光场是子波干涉的结果。

惠更斯—菲涅耳原理积分



P_0 点面元对P点扰动的贡献为：

$$dU(P) = C \cdot K(\theta) \frac{A\exp[ikr']}{r'} \cdot \frac{\exp[ikr]}{r} ds$$

P点的总扰动为：

$$U(P) = C \iint_{\Sigma} \frac{A\exp[ikr']}{r'} \cdot K(\theta) \cdot \frac{\exp[ikr]}{r} ds$$

式中：C为常数， $K(\theta)$ 为倾斜因子

二、亥姆霍兹方程

由麦克斯韦方程可得标量波动方程 $\nabla^2 u - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = 0$

拉普拉斯算子 $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

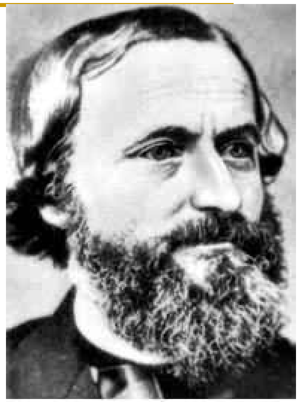
对于光振动 $u(P,t) = U(P)\exp[-i\omega t] = U(P)\exp[-i\omega t]$

满足与时间无关的亥姆霍兹方程

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)U(P) = 0$$

自由传播空间!

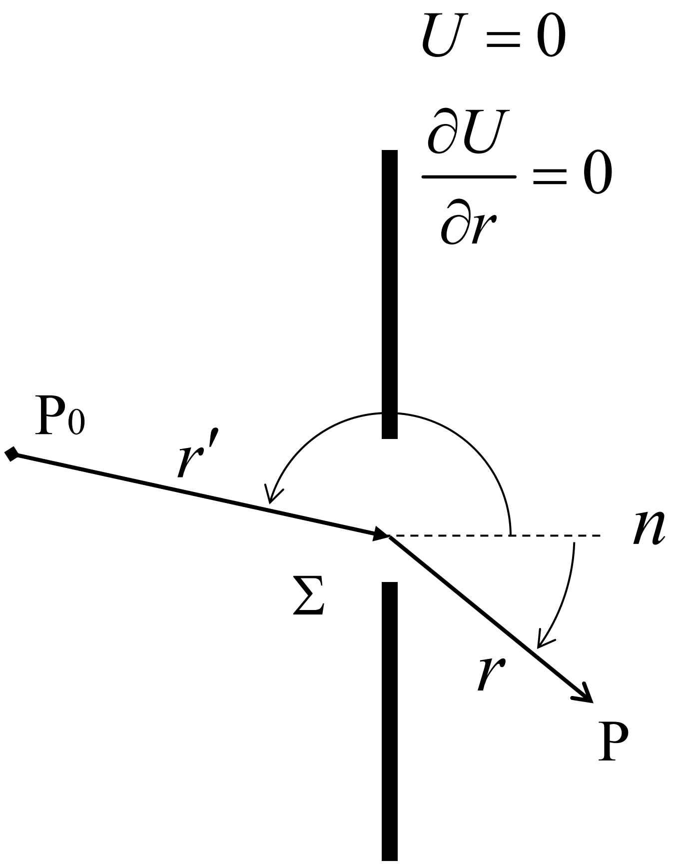
三、基尔霍夫衍射公式



基尔霍夫，G.R.

基尔霍夫假设

- 在孔径Σ上，场分布U及其偏导数与没有屏时完全相同
- 在屏幕的几何阴影区，场分布及其偏导数恒为零



利用格林公式，基尔霍夫导出其解为：

$$\boxed{U(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{A\exp[ikr']}{r'}\cdot\left[\frac{\cos(n,r)-\cos(n,r')}{2}\right]\cdot\frac{\exp[ikr]}{r}dS}$$

$$=\frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma}U(P_0)K(\theta)\cdot\frac{\exp[ikr]}{r}dS$$

与菲涅耳原理一致！

倾斜因子 $K(\theta)=\dfrac{\cos(n,r)-\cos(n,r')}{2}$　　积分常数 $C=\dfrac{1}{i\lambda}$

四、光波传播的线性性质

1. 线性叠加

定义在Σ上的光场 $U(P)$ $\rightarrow U(P)=\begin{cases} U(P) & P\in\Sigma \\ 0 & others \end{cases}$

基尔霍夫衍射积分 $U(P)=\dfrac{1}{i\lambda}\iint_{-\infty}^{\infty} U(P_0)K(\theta)\cdot\dfrac{\exp[ikr]}{r}dS$

令 $h(P,P_0)=\dfrac{1}{i\lambda}K(\theta)\cdot\dfrac{\exp[ikr]}{r}$ 得 $U(P)=\iint_{-\infty}^{\infty} h(P,P_0)U(P_0)dS$

在(x,y)平面上 $U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} h(x,y;x_0,y_0)U(x_0,y_0)dx_0dy_0$

$$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} h(x,y;x_0,y_0)U\left(x_0,y_0\right)dx_0dy_0$$

- 光波的传播现象可以看作是一个线性系统，

$h(P,P_0)=\dfrac{1}{i\lambda}K\left(\theta\right)\cdot\dfrac{\exp[ikr]}{r}$ 为系统的脉冲响应函数。

- 基尔霍夫积分公式表明，考察点的光场应该是带有不同权重因子的相干球面子波的线性叠加。

2.卷积

假设倾斜因子 $K(\theta)=1$, $h(P,P_0)=\dfrac{1}{i\lambda}\dfrac{\exp[ikr]}{r}$

而 $r=\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

脉冲响应 $$h(x,y;x_0,y_0)=\frac{\exp[ik\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,]}{i\lambda\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$
$$=h(x-x_0,y-y_0)$$

衍射叠加积分 $$U(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)h(x-x_0,y-y_0)dx_0dy_0$$

$$=U(x,y)\otimes h(x,y)$$

孔径平面的透射光场$U(x_0,y_0)$和观察平面光场$U(x,y)$之间存在一个卷积积分的关系，光波在衍射孔径之后的传播是一个线性空不变系统。

- §2.2 基尔霍夫衍射理论
- §2.3 衍射的角谱理论

§2.2 基尔霍夫衍射理论

衍射:

索末菲定义：不能用反射或折射来解释的光线对直线光路的任何偏离

惠更斯—菲涅尔定义：光波在传播过程中波面受到限制，使自由完整的波面产生破缺的现象

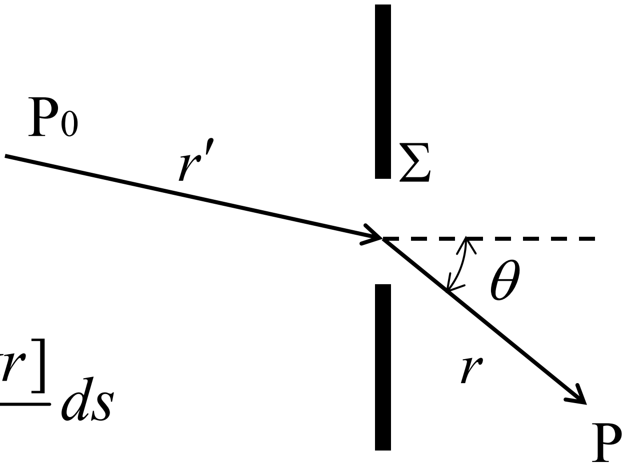
现代定义：光波在传播过程中不论任何原因导致波前的复振幅分布（包括振幅分布和位相分布）的改变，使自由传播光场变为衍射光场的现象，都称为衍射。

一、惠更斯-菲涅尔原理

- 1678年，惠更斯为解释波的传播提出子波的假设，认为波面上每一点都可以作为次级子波的波源，后一时刻的波阵面则可看作是这些子波的包络面

- 1818年，菲涅耳引入干涉概念对惠更斯原理进行了补充，认为子波源应当是相干的，后空间光场是子波干涉的结果。

惠更斯—菲涅耳原理积分



P_0点面元对P点扰动的贡献为：

$$dU(P)=C\cdot K(\theta)\frac{A\exp[ikr']}{r'}\cdot\frac{\exp[ikr]}{r}ds$$

P点的总扰动为：

$$U(P)=C\iint_{\Sigma}\frac{A\exp[ikr']}{r'}\cdot K(\theta)\cdot\frac{\exp[ikr]}{r}ds$$

式中：C为常数，$K(\theta)$ 为倾斜因子

二、亥姆霍兹方程

亥姆霍兹

由**麦克斯韦方程**可得标量波动方程

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0$$

拉普拉斯算子 $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

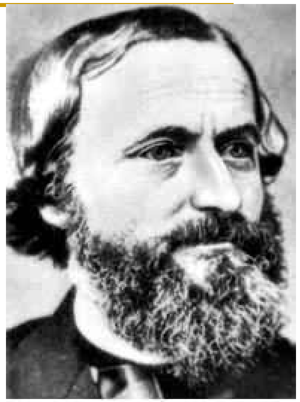
对于光振动 $u(P,t) = U(P)\exp[-i\omega t] = U(P)\exp[-i\omega t]$

满足与时间无关的亥姆霍兹方程

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)U(P) = 0$$

自由传播空间！

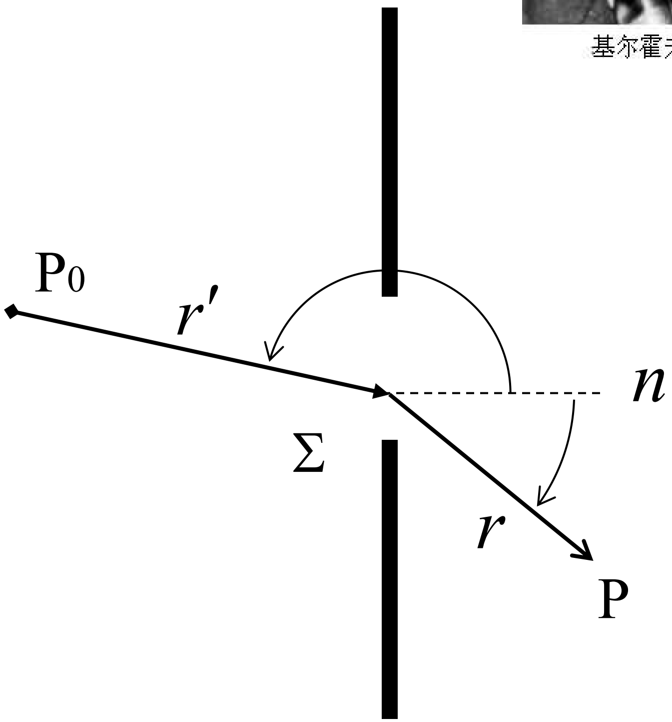
三、基尔霍夫衍射公式



基尔霍夫，G.R.

基尔霍夫假设 $U=0,\quad \dfrac{\partial U}{\partial r}=0$

- 在孔径Σ上，场分布U及其偏导数与没有屏时完全相同
- 在屏幕的几何阴影区，场分布及其偏导数恒为零



利用格林公式，基尔霍夫导出其解为：

$$\boxed{U(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{A\exp[ikr']}{r'}\cdot\left[\frac{\cos(n,r)-\cos(n,r')}{2}\right]\cdot\frac{\exp[ikr]}{r}dS}$$

$$=\frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma}U(P_0)K(\theta)\cdot\frac{\exp[ikr]}{r}dS$$

与菲涅耳原理一致！

倾斜因子 $K(\theta)=\frac{\cos(n,r)-\cos(n,r')}{2}$ 积分常数 $C=\frac{1}{i\lambda}$

四、光波传播的线性性质

1. 线性叠加

定义在Σ上的光场 $U_0(P)=\begin{cases}U_0(P) & P\in\Sigma\\ 0 & others\end{cases}$

基尔霍夫衍射积分 $U(P)=\dfrac{1}{i\lambda}\iint_{-\infty}^{\infty}U_0(P_0)K(\theta)\cdot\dfrac{\exp[ikr]}{r}dS$

令 $h(P,P_0)=\dfrac{1}{i\lambda}K(\theta)\cdot\dfrac{\exp[ikr]}{r}$ 得

$$U(P)=\iint_{-\infty}^{\infty}h(P,P_0)U_0(P_0)dS$$

在(x, y)平面上

$$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} h(x,y;x_0,y_0)U_0\left(x_0,y_0\right)dx_0dy_0$$

- 光波的传播现象可以看作是一个线性系统，

$h(P,P_0)=\dfrac{1}{i\lambda}K\left(\theta\right)\cdot\dfrac{\exp[ikr]}{r}$ 为系统的脉冲响应函数。

- 基尔霍夫积分公式表明，考察点的光场应该是带有不同权重因子的相干球面子波的线性叠加。

2.卷积

假设倾斜因子 $K(\theta)=1$， $h(P,P_0)=\frac{1}{i\lambda}\frac{\exp[ikr]}{r}$

而 $r=\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

脉冲响应 $h(x,y;x_0,y_0)=\frac{\exp[ik\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}]}{i\lambda\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$

$$=h(x-x_0,y-y_0)$$

衍射叠加积分

$$U(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)h(x-x_0,y-y_0)dx_0dy_0$$

$$=U(x,y)\otimes h(x,y)$$

孔径平面的透射光场$U(x_0,y_0)$和观察平面光场$U(x,y)$之间存在一个卷积积分的关系，光波在衍射孔径之后的传播是一个**线性空不变系统**。

§ 2.3 衍射的角谱理论

将光场中某一平面的光场按照平面波展开

$$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty} A(f_x,f_y)\exp\left[i2\pi\left(f_x x+f_y y\right)\right]df_x df_y$$

对上式作逆变换得频谱权重为

$$A(f_x,f_y)=\iint_{-\infty}^{\infty} U(x,y)\exp\left[-i2\pi\left(f_x x+f_y y\right)\right]dxdy$$

频谱

利用 $f_x=\dfrac{\cos\alpha}{\lambda}$，$f_y=\dfrac{\cos\beta}{\lambda}$，频谱可以改写为：

$$A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\iint_{-\infty}^{\infty} U(x,y)\exp\left[-i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]dxdy$$

角谱

一、角谱的传播

对（孔径平面）物平面，复振幅 $U_0(x_0, y_0)$

$$U_0(x_0,y_0)=\int\int_{-\infty}^{\infty}A_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x_0+\frac{\cos\beta}{\lambda}y_0\right)\right]d\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)d\left(\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

对于（观察平面）像平面，复振幅 $U(x,y)$ 可写为：

$$U(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty}A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]d\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)d\left(\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

两光场满足衍射的亥姆霍兹方程!!

将物平面光场代入衍射的亥姆霍兹方程 $\left(\nabla^2+k^2\right)U\left(P\right)=0$ 得：

$$(\nabla^2+k^2)\left\{A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]\right\}=0$$

A与x y无关，仅为z 的函数

$$\frac{\partial}{\partial x}A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\frac{\partial}{\partial y}A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=\frac{d}{dz}A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

对于指数函数，有

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]=\left(i2\pi\frac{\cos\alpha}{\lambda}\right)\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]=\left(i2\pi\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\exp\left[i2\pi\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda}x+\frac{\cos\beta}{\lambda}y\right)\right]=0$$

得到方程的基本解

$$A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=C\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left[ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\,\right]$$

其中 $C\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 由初始条件决定。

在孔径平面z=0，角谱为 $A_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$ 则

$$C\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=A_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)$$

得到方程的解写为

$$\boxed{A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=A_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp\left[ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}\,\right]}$$

角谱理论的衍射公式

$$\boxed{A(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}) = A_0(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda})\exp[ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}]}$$

(1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta<1$ 传播仅仅是引入相位移动，振幅不受影响。

(2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta>1$ 倏逝波

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=i\mu$$

$$A(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}) = A_0(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda})\exp[-\mu z]$$

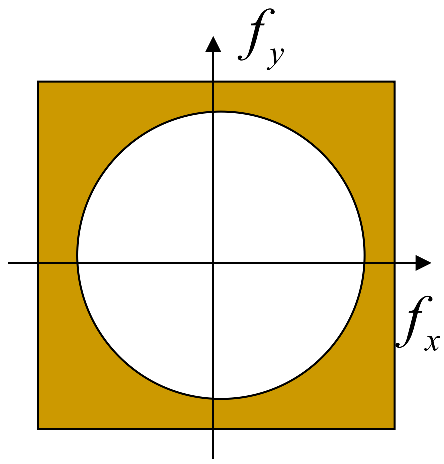
(3) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1 \quad \cos\gamma=0, \gamma=90^0$

理论表明光将沿垂直z轴的方向传播，与事实不符，显示出标量理论的局限性。此时应该采取矢量理论更为合适。

二、表征系统的脉冲响应

$$\boxed{A\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)=A_0\left(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}\right)\exp[ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}]}$$

$$A(f_x,f_y)=A_0(f_x,f_y)\exp[ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}]$$
$$=A_0(f_x,f_y)H(f_x,f_y)$$



传递函数 $H(f_x,f_y)=\exp[ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}]$

忽略倏逝波 $H(f_x,f_y)=\begin{cases}\exp[ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}], & f_x^2+f_y^2<1\\ 0, & others\end{cases}$

三、角谱理论与基尔霍夫衍射理论

基尔霍夫理论：衍射的球面波理论

角　谱　理　论：衍射的平面波理论

$$U(x,y)=\iint_{-\infty}^{\infty}A(f_x,f_y)\exp\left[i2\pi\left(f_x x+f_y y\right)\right]df_x df_y$$

$$\uparrow$$

$$A(f_x,f_y)=A_0(f_x,f_y)\exp[ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}\,]$$

$$\uparrow$$

$$A_0\left(f_x,f_y\right)=\iint_{-\infty}^{\infty}U\left(x_0,y_0\right)\exp\left[i2\pi\left(f_x x_0+f_y y_0\right)\right]dx_0 dy_0$$

$$U(x,y)=\iint A_0(f_x,f_y)\exp[ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}]\times\exp\left[i2\pi\left(f_x x+f_y y\right)\right]df_x df_y$$

$$=\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)dx_0 dy_0\int\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\exp[ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}]}_{\boxed{H(f_x,f_y)}}$$

$$\times\exp\{i2\pi[f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)]\}df_x df_y$$

令 $h(x-x_0,y-y_0)=F^{-1}\{H(f_x,f_y)\}$，在近轴条件下，

$$h(x-x_0,y-y_0)=\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp[ikz\sqrt{1-(\lambda f_x)^2-(\lambda f_y)^2}]$$

$$\times\exp\{i2\pi[f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)]\}df_x df$$

$$=\frac{\exp[ik\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}]}{i\lambda\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

$$U(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\,h(x-x_0,y-y_0)dx_0dy_0$$

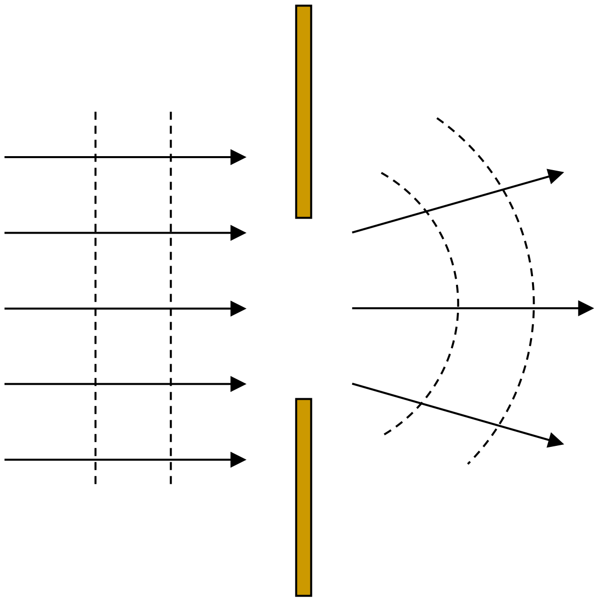
$$=U_0(x,y)\otimes h(x,y)$$

$$h(x,y)=\frac{\exp[ik\sqrt{z^2+x^2+y^2}]}{i\lambda\sqrt{z^2+x^2+y^2}}$$

- 再一次证明，光的传播可看作线性空不变系统。
- 基尔霍夫理论是在空间域讨论光的传播，把孔径平面看作点光源的集合，观察面上的光场分布是球面子波的叠加。
- 角谱理论是在频率域讨论光的传播，把孔径平面看作平面波分量的组合，观察面的光场是这些平面波分量的叠加。
- 两种衍射理论的一致性的根本原因在于标量的波动方程。

四、孔径对角谱的影响

孔径用复振幅透过率函数表示



$$t(x_0, y_0) = \begin{cases} 1, & in \\ 0, & out \end{cases}$$

屏后的光场分布（考虑基尔霍夫假设）

$$U_1(x_0, y_0) = U_0(x_0, y_0)t(x_0, y_0)$$

假定角谱 $A_0(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}) \Leftrightarrow U_0(x_0, y_0)$

$$A_1(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}) \Leftrightarrow U_1(x_0, y_0), \quad T(\frac{\cos\alpha}{\lambda}, \frac{\cos\beta}{\lambda}) \Leftrightarrow t(x_0, y_0)$$

得卷积关系 $$A_1(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}) = A_0(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}) \otimes T(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda})$$

例子：矩形孔的衍射 $t(x_0) = \mathrm{rect}(\frac{x_0}{a})$

入射光场 $U_0(x_0, y_0) = 1$

透射光场的角谱 $$A_1(\frac{\cos\alpha}{\lambda}) = A_0(\frac{\cos\alpha}{\lambda}) \otimes T(\frac{\cos\alpha}{\lambda})$$

$$= a\mathrm{sinc}(\frac{a\cos\alpha}{\lambda}) \otimes \delta(\frac{\cos\alpha}{\lambda})$$

$$= a\mathrm{sinc}(\frac{a\cos\alpha}{\lambda})$$

- §2.4 菲涅尔衍射

基尔霍夫衍射公式

$$\boxed{U(P)=\frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{A\exp[ikr']}{r'}\cdot\left[\frac{\cos(n,r)-\cos(n,r')}{2}\right]\cdot\frac{\exp[ikr]}{r}dS}$$

倾斜因子 $K(\theta)=\dfrac{\cos(n,r)-\cos(n,r')}{2}$ 积分常数 $C=\dfrac{1}{i\lambda}$

两种衍射方式：菲涅尔衍射和夫琅禾费衍射

§ 2.4 菲涅尔衍射

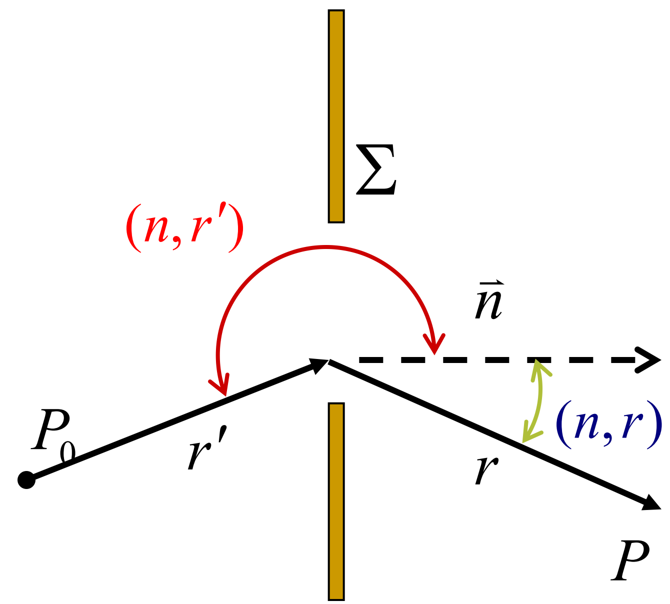
一、菲涅尔衍射公式 $U(x,y)=\int\int_{-\infty}^{\infty} U(x_0,y_0)\,h(x-x_0,y-y_0)\,dx_0dy_0$

1. 基尔霍夫公式的简化

近轴条件下的倾斜因子

$$K(\theta)=\frac{\cos(\vec{n},\vec{r})-\cos(\vec{n},\vec{r}')}{2}$$

$$=\frac{1-(-1)}{2}=1$$



$$h(x-x_0,y-y_0)=\frac{\exp[ikr]}{i\lambda r}$$

近轴条件下的菲涅尔近似

$$r=\left[z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r=z\left\{1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{z^2}\right]^2+\cdots\cdots\right\}$$

菲涅耳近似 $$r=z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y_0}{z}\right)^2\right]$$

所以

$$h\left(x-x_0,y-y_0\right)=\frac{1}{i\lambda z}\exp\left(ikz\right)\exp\left\{i\frac{k}{2z}\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]\right\}$$

菲涅尔衍射公式

$$U\left(x,y\right)=\frac{1}{i\lambda z}\exp\left(ikz\right)\int\int_{-\infty}^{\infty}U\left(x_0,y_0\right)\cdot\exp\left\{i\frac{k}{2z}\left[\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2\right]\right\}dx_0dy_0$$

2. 菲涅耳衍射与傅里叶变换的关系

$$U(x,y)=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\cdot\exp\left\{i\frac{k}{2z}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\right\}dx_0dy_0$$

指数项展开得 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=x^2+y^2+x_0^2+y_0^2-2(xx_0+yy_0)$

代入上式整理得：

$$U(x,y)=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp\left[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right]$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\cdot\exp\left[\frac{-i2\pi}{\lambda z}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0$$

傅里叶变换 $f_x=\dfrac{x}{\lambda z}$， $f_y=\dfrac{y}{\lambda z}$

$$U(x,y)=\frac{\exp[ikz]}{i\lambda z}\exp[\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)]\times F\left\{U\left(x_0,y_0\right)\exp\left[\frac{ik}{2z}\left(x_0^2+y_0^2\right)\right]\right\}$$

$$f_x=\frac{x}{\lambda z}\quad f_y=\frac{y}{\lambda z}$$

观察平面上的复振幅分布正比于

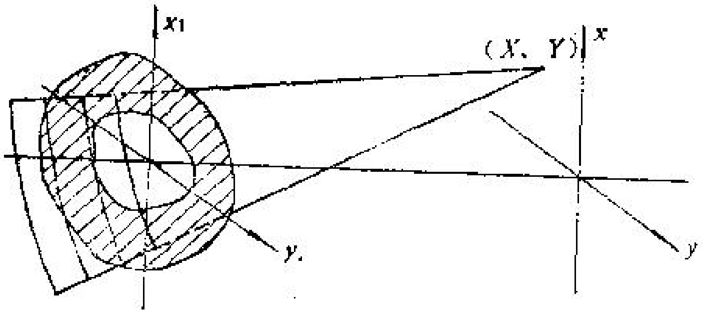
$$U\left(x_0,y_0\right)\exp\left[\frac{ik}{2z}\left(x_0^2+y_0^2\right)\right]$$

的傅里叶变换，观察平面上光场的函数分布随着z增大会发生变化。 ----即沿z轴亮暗交替

3.会聚球面波照明消除菲氏衍射中的二次相位因子

二次相位因子 $\exp\left[\frac{ik}{2z}\left(x_0^2+y_0^2\right)\right]$

采用会聚球面波照明的方法，会聚中心(X, Y)



孔径平面(x, y)上的复振幅为：

$$U_0\left(x_0, y_0\right)=\frac{a_0}{z}\exp\left[-ik\frac{\left(x_0-X\right)^2+\left(y_0-Y\right)^2}{2z}\right]$$

孔径后光场复振幅 $U_0'(x_0, y_0) = t(x_0, y_0)U_0(x_0, y_0)$

在观察平面（x, y）上的复振幅

$$U(x,y) = \frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]F\left\{U_0'(x_0,y_0)\exp[\frac{ik}{2z}\left(x_0^2+y_0^2\right)]\right\}$$

$$= \frac{a_0}{i\lambda z^2}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty} t(x_0,y_0)\exp\left(ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2z}\right)\exp\left[-ik\frac{(x_0-X)^2+(y_0-Y)^2}{2z}\right]\exp\left[\frac{-i2\pi}{\lambda z}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0$$

整理得 $$U(x,y)=\frac{a_0}{i\lambda\, z^2}\exp(ikz)\exp[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)]\exp[-ik\frac{X^2+Y^2}{2z}]$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty} t(x_0,y_0)\exp[-i2\pi(\frac{x-X}{\lambda z}x_0+\frac{y-Y}{\lambda z}y_0)]dx_0dy_0$$

$$=\frac{a_0}{i\lambda z^2}\exp(ikz)\exp(ik\frac{x^2+y^2}{2z})\exp(-ik\frac{X^2+Y^2}{2z})$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty} t(x_0,y_0)\exp[-i2\pi(f_x x_0+f_y y_0)]dx_0dy_0$$

$$=C\exp(ikz)\exp(ik\frac{x^2+y^2}{2z})\exp(-ik\frac{X^2+Y^2}{2z})F\{t(x_0,y_0)\}$$

$$\boxed{f_x=\frac{x-X}{\lambda z}}$$

$$\boxed{f_y=\frac{y-Y}{\lambda z}}$$

观察屏上的菲涅耳衍射图样的复振幅分布与衍射屏上的复振幅透过率的傅里叶变换成正比。

二、菲涅尔衍射的角谱理论

$$A(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}) = A_0(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda})H(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda})$$

$$H(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}) = \exp[ikz\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}]$$

相位部分按照级数展开，并取前两项

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta} \approx 1-\frac{1}{2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)$$

$$H(\frac{\cos\alpha}{\lambda},\frac{\cos\beta}{\lambda}) = \exp(ikz)\exp[-i\frac{kz}{2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)]$$

$$H(f_x, f_y) = \exp(ikz)\exp[-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)]$$

$$\boxed{f_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda}, \quad f_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}}$$

观察平面的光场

$$U(x, y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} U(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0$$

其中

$$h(x - x_0, y - y_0) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikz)\exp[-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)]$$

$$\times \exp\{i2\pi[f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)]\} df_x df_y$$

$$= \frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\exp\{i\frac{k}{2z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\}$$

$$U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\exp\{i\frac{k}{2z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\}dx_0dy_0$$

$$=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)]$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\exp[i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)]\exp[-i\frac{k}{z}(xx_0+yy_0)]dx_0dy_0$$

$$=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)]F\left\{U(x_0,y_0)\exp[i\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)]\right\}$$

$$\boxed{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

角谱理论与基尔霍夫理论等价！

三、菲涅尔衍射的例子——塔尔伯特(Talbot)效应

1830年发现：周期性物体的菲涅尔衍射，会产生自成像的现象。

求：一维周期性物体 $t(x)=\frac{1}{2}[1+\beta\cos(2\pi x/d)]$

的衍射强度分布。

其角谱(傅里叶变换)为

$$T(f_x) = F\{t(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\exp[-i2\pi f_x x]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[1+\beta\cos(2\pi x/d)]\exp[-i2\pi f_x x]dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\exp[-i2\pi f_x x]dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{2}\cos(2\pi x/d)\exp[-i2\pi f_x x]dx$$

积分后得到

$$T(f_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\exp[-i2\pi f_x x]dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{4}\exp(i2\pi x/d)\exp[-i2\pi f_x x]dx$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{4}\exp(-i2\pi x/d)\exp[-i2\pi f_x x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f_x) + \frac{\beta}{4}\delta(f_x - 1/d) + \frac{\beta}{4}\delta(f_x + 1/d)$$

传输函数 $H(f_x)=\exp[-i\pi\lambda z f_x^{\ 2}]\exp[ikz]$

观察平面光场的角谱

$$
\begin{aligned}
T'(f_x) &= T(f_x)H(f_x)\\
&=[\frac{1}{2}\delta(f_x)+\frac{\beta}{4}\delta(f_x-1/d)+\frac{\beta}{4}\delta(f_x+1/d)]\exp[ikz-i\pi\lambda z f_x^{\ 2}]\\
&=\exp(ikz)\left\{\frac{1}{2}\delta(f_x)+\frac{\beta}{4}\delta(f_x-\frac{1}{d})\exp[-i\frac{\pi\lambda z}{d^2}]+\frac{\beta}{4}\delta(f_x+\frac{1}{d})\exp[-i\frac{\pi\lambda z}{d^2}]\right\}
\end{aligned}
$$

空间域的观察平面光场分布

$$
\begin{aligned}
t'(x) &= F^{-1}\{T'(f_x)\}\\
&=\frac{1}{2}\exp(ikz)+\frac{\beta}{2}\exp(ikz-i\frac{\pi\lambda z}{d^2})\cos(2\pi x/d)
\end{aligned}
$$

衍射强度分布$|t'(x)|^2 = \frac{1}{4}\left|1+\beta\exp(-i\frac{\pi\lambda z}{d^2})\cos(2\pi x/d)\right|^2$

(1) Talbot 像，当 $z = \frac{2md^2}{\lambda}$ $\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

$$|t'(x)|^2 = \frac{1}{4}\left|1+\beta\cos(2\pi x/d)\right|^2$$

对比 $t(x) = \frac{1}{2}[1+\beta\cos(2\pi x/d)]$

(2) Talbot 反转像(副像)，当 $z = \frac{(2m+1)d^2}{\lambda}$

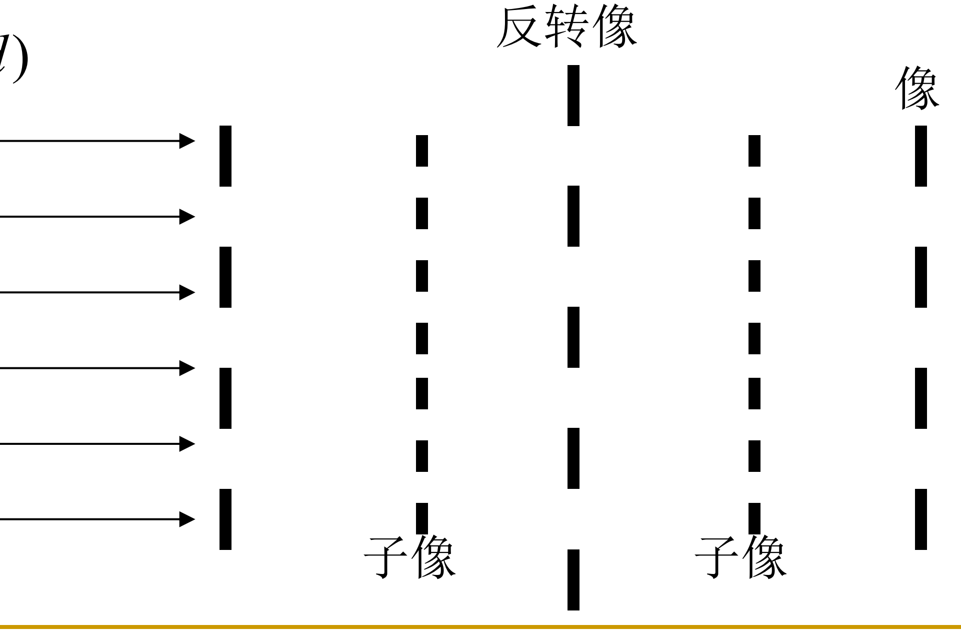
$$|t'(x)|^2 = \frac{1}{4}\left|1-\beta\cos(2\pi x/d)\right|^2$$

(3) Talbot 子像，当 $z=(m-\frac{1}{2})\frac{d^2}{\lambda}$

$$\left|t'(x)\right|^2=\frac{1}{4}\left|1\pm i\beta\cos(2\pi x/d)\right|^2=\frac{1}{4}[1+\beta^2\cos^2(2\pi x/d)]$$

$$=\frac{1}{4}[1+\beta^2\frac{1+\cos(4\pi x/d)}{2}]$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\beta^2+\frac{1}{8}\beta^2\cos(4\pi x/d)$$



小结

- 光的传播可看作线性空不变系统，基尔霍夫理论与角谱理论等价。
- 基尔霍夫理论是在空间域讨论光的传播，把孔径平面看作点光源的集合，观察面上的光场分布是球面子波的叠加。
- 角谱理论是在频率域讨论光的传播，把孔径平面看作平面波分量的组合，观察面的光场是这些平面波分量的叠加。
- 菲涅尔衍射与傅立叶变换的关系。

§2.5 弗朗禾费衍射
§2.6 巴比涅原理

§ 2.5 弗朗禾费衍射

一、弗朗禾费近似

基尔霍夫衍射公式

$$U(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int U_0(x_0,y_0)h(x-x_0,y-y_0)dx_0dy_0$$

式中： $h(x-x_0,y-y_0)=\dfrac{\exp[ikr]}{i\lambda r}$

r 的简化： $r=\sqrt{z^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$$r = z\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x - x_0}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{z}\right)^2\right] - \frac{1}{8}\left[\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{z^2}\right]^2 + \ldots\right\}$$

略去二阶以上小量----菲涅耳近似

$$r \approx z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y - y_0}{z}\right)^2\right]$$

$$= z + \frac{1}{2z}\left[x^2 + y^2 - 2(xx_0 + yy_0) + \boxed{x_0^2 + y_0^2}\right]$$

-----------------夫琅和费近似

$$\approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z} - \frac{xx_0 + yy_0}{z}$$

夫琅和费衍射公式为：

$$U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}U_0(x_0,y_0)\exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda z}\left(xx_0+yy_0\right)\right]dx_0dy_0$$

近似条件及范围

$$k\frac{(x_0^2+y_0^2)}{2z}\ll 1$$

$$(x_0^2+y_0^2)\ll\frac{\lambda z}{\pi}$$

例：λ =500nm，边长为0.1cm的方形孔的弗朗禾费衍射区？

由 $$k\frac{(x_0^2+y_0^2)}{2z}=\frac{\pi}{\lambda}\frac{(x_0^2+y_0^2)}{z}\le 1$$

得 $$z\ge\frac{\pi(x_0^2+y_0^2)}{\lambda}=\frac{3.14\times[(0.5\times10^{-3})^2+(0.5\times10^{-3})^2]}{500\times10^{-9}}$$

$$z\ge\frac{3.14\times0.5\times10^{-6}}{500\times10^{-9}}=3.14(m)$$

二、夫琅和费衍射与傅里叶变换的关系

$$U(x,y)=\frac{\exp(ikz)}{i\lambda z}\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]$$

$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0+yy_0)\right]dx_0dy_0$$

将积分部分改写为：

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}U(x_0,y_0)\exp\left[-i2\pi\left(f_xx_0+f_yy_0\right)\right]dx_0dy_0$$

$$=F\left\{U\left(x_0,y_0\right)\right\}$$

$$\boxed{f_x=\frac{x}{\lambda z},\ f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

观察点光场复振幅分布**正比于**衍射屏光场复振幅分布的傅里叶变换

$$U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]F\left\{U(x_0,y_0)\right\}\Bigg|_{\substack{f_x=\frac{x}{\lambda z}\\ f_y=\frac{y}{\lambda z}}}$$

单位振幅平面波垂直照明衍射物时，衍射屏光场的复振幅为：

$$U(x_0,y_0)=1\cdot t(x_0,y_0)=t(x_0,y_0)$$

代入 $U(x_0,y_0)$ 得：

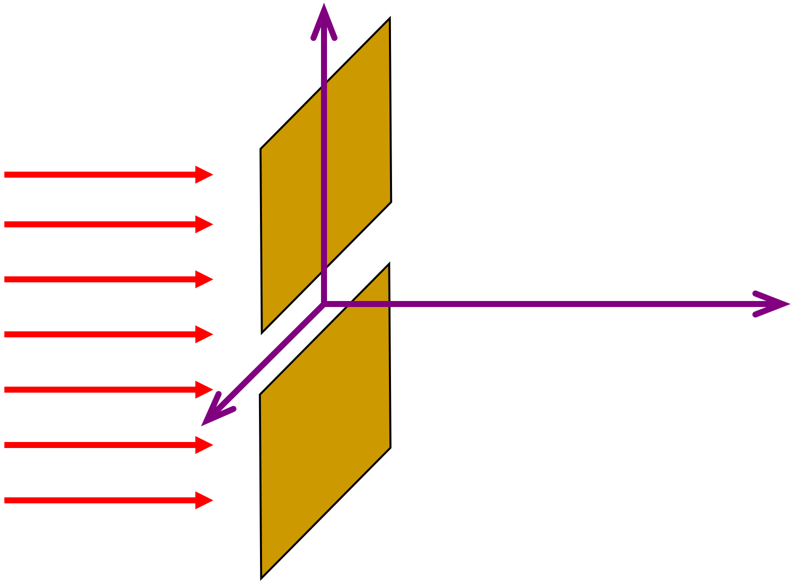
$$U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]F\left\{t(x_0,y_0)\right\}$$

三、夫琅和费衍射的例子

一、单缝的衍射

矩形孔的复振幅透过率为：

$$t(x_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)$$



$$F\left\{t\left(x_0\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\exp[-i2\pi f_x x_0]dx_0$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\exp[-i2\pi a\, f_x \frac{x_0}{a}]d\frac{x_0}{a}$$

$$= a\int_{-1/2}^{1/2} 1\cdot\exp[-i2\pi a\, f_x x]dx$$

$$= a\ \mathrm{sinc}\left(af_x\right)$$

$$U(x)=\frac{1}{\sqrt{i\lambda z}}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{kx^2}{2z}\right]F\left\{U(x_0)\right\}\Big|f_x=\frac{x}{\lambda z}$$

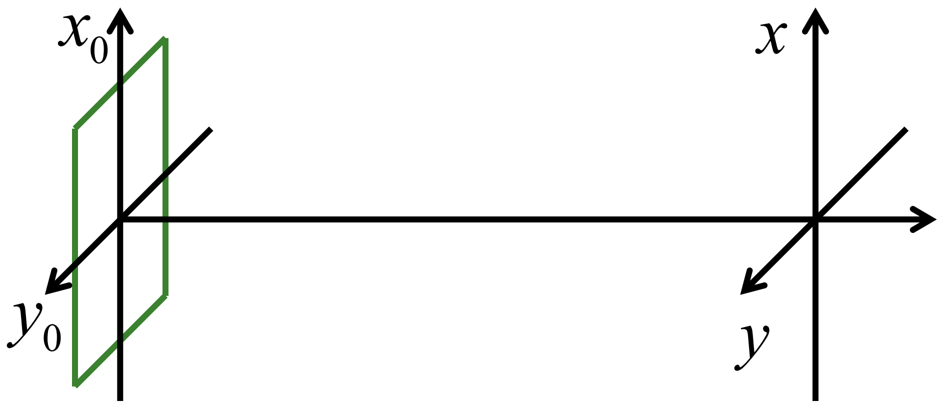
$$\because\quad F\{U_0\}=a\,\mathrm{sinc}\left(af_x\right)$$

$$\therefore\quad U(x)=\frac{1}{\sqrt{i\lambda z}}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{kx^2}{2z}\right]a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)$$

则强度分布

$$I(x)=\left|U(x)\right|^2=\frac{a^2}{\lambda z}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)$$

二、矩形孔的衍射



矩形孔的复振幅透过率为：

$$t\left(x_0, y_0\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right)$$

$$F\left\{t\left(x_0, y_0\right)\right\} = \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{b}\right) e^{-i2\pi\left(f_x x_0 + f_y y_0\right)} dx_0 dy_0$$

$$= a\ \mathrm{sinc}\left(af_x\right) \times b\ \mathrm{sinc}\left(bf_y\right)$$

$$U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]F\left\{U(x_0,y_0)\right\}\Bigg|_{\substack{f_x=\frac{x}{\lambda z}\\ f_y=\frac{y}{\lambda z}}}$$

$$\because\quad F\{U_0\}=a\,\mathrm{sinc}\left(af_x\right)\times b\,\mathrm{sinc}\left(bf_y\right)$$

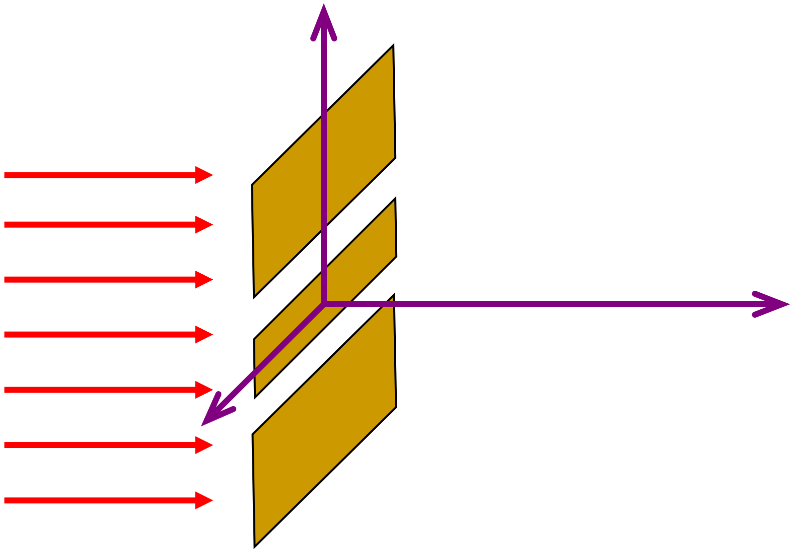
$$\therefore\quad U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)b\,\mathrm{sinc}\left(\frac{by}{\lambda z}\right)$$

则强度分布

$$I(x,y)=\left|U(x,y)\right|^2=\frac{a^2b^2}{\lambda^2z^2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{by}{\lambda z}\right)$$

三、双缝衍射

双缝间距为 d
单缝宽度为 a



双缝的复振幅透过率为：

$$t(x_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0 - d/2}{a}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{x_0 + d/2}{a}\right)$$

$$F\left\{t\left(x_0\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_0 - d/2}{a}\right)\exp[-i2\pi f_x x_0]dx_0$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{x_0 + d/2}{a}\right)\exp[-i2\pi f_x x_0]dx_0$$

$$= a\ \mathrm{sinc}\left(af_x\right)\left\{\exp[i\pi f_x d] + \exp[-i\pi f_x d]\right\}$$

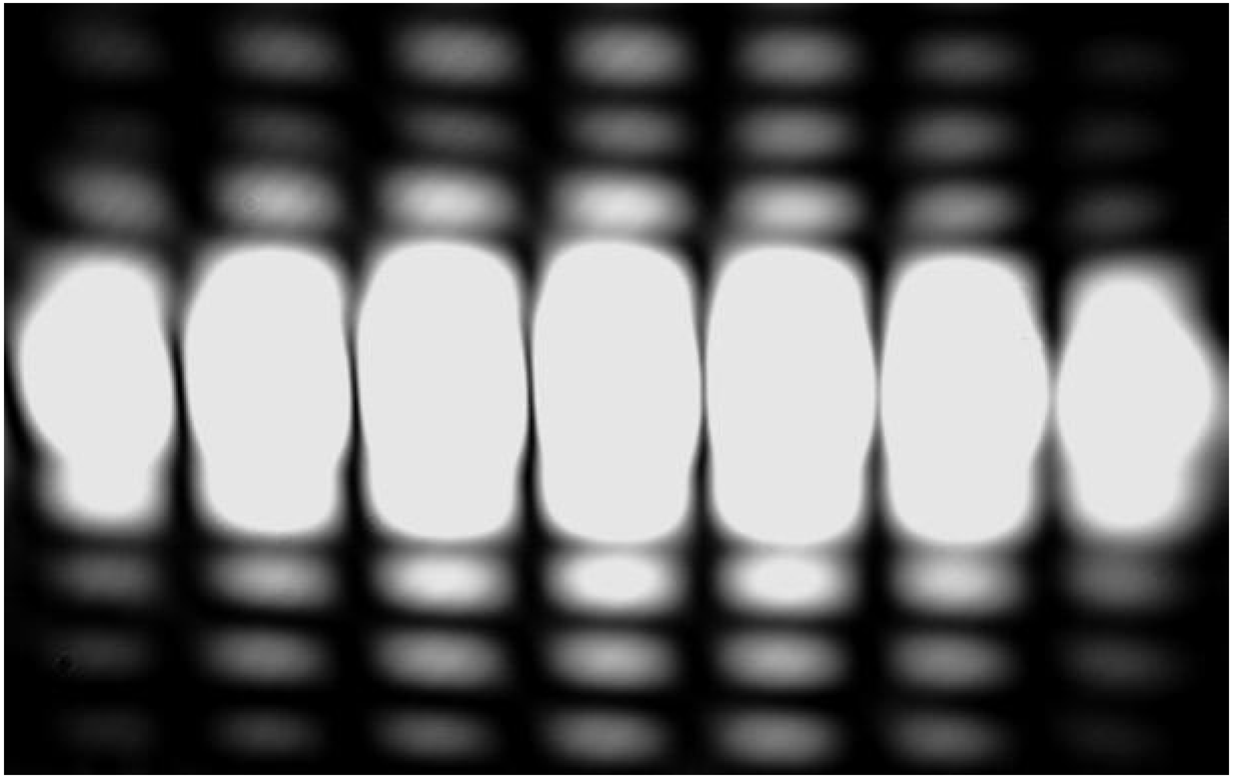
$$= 2a\ \mathrm{sinc}\left(af_x\right)\cos(\pi f_x d)$$

$$U(x)=\frac{1}{\sqrt{i\lambda z}}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{kx^2}{2z}\right]F\{U(x_0)\}\Big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z}}$$

$$\because \quad F\{U_0\}=2a\,\mathrm{sinc}(af_x)\cos(\pi f_x d)$$

$$\therefore \quad U(x)=\frac{1}{\sqrt{i\lambda z}}\exp(ikz)\exp\left[i\frac{kx^2}{2z}\right]2a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\cos\left(\frac{\pi dx}{\lambda z}\right)$$

强度分布 $I(x)=\left|U(x)\right|^2=\frac{4a^2}{\lambda z}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right)\cos^2\left(\frac{\pi dx}{\lambda z}\right)$



四、圆孔衍射

圆孔的复振透过率为：

$$t(r_0)=\mathrm{circ}\left(\frac{r_0}{a}\right)=\begin{cases}1, & |r_0|\le a\\ 0, & 其它\end{cases}$$

圆对称函数，其付氏变换用傅里叶---贝塞尔变换表示。

$$\mathrm{B}\left\{\mathrm{circ}(r_0)\right\}=2\pi\int_0^\infty \mathrm{circ}(r_0)r_0 J_0(2\pi r_0\rho)dr_0$$

$$\mathrm{B}\left\{\operatorname{circ}\left(r_0\right)\right\} = 2\pi\int_0^a 1\cdot r_0 J_0\left(2\pi\, r_0\rho\right)dr_0$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi\rho\, a} \frac{r'}{2\pi\rho} J_0\left(r'\right)\frac{dr'}{2\pi\rho}$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi\rho\, a} r' J_0\left(r'\right)dr'$$

$$= \frac{1}{2\pi\rho^2} 2\pi\rho a\cdot J_1\left(2\pi\rho a\right)$$

$$= \frac{a}{\rho}\cdot J_1\left(2\pi\rho a\right)$$

$$\boxed{\rho \rightarrow \frac{r}{\lambda z}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A\left(r\right) &= \frac{a\lambda z}{r} J_1\left(kar/z\right) \\ &= \pi a^2\left[\frac{2J_1\left(kar/z\right)}{kar/z}\right] \end{aligned}}$$

$$\boxed{I(r)=\left|A(r)\right|^2=\pi^2a^4\left[\frac{2J_1(kar/z)}{kar/z}\right]^2}$$

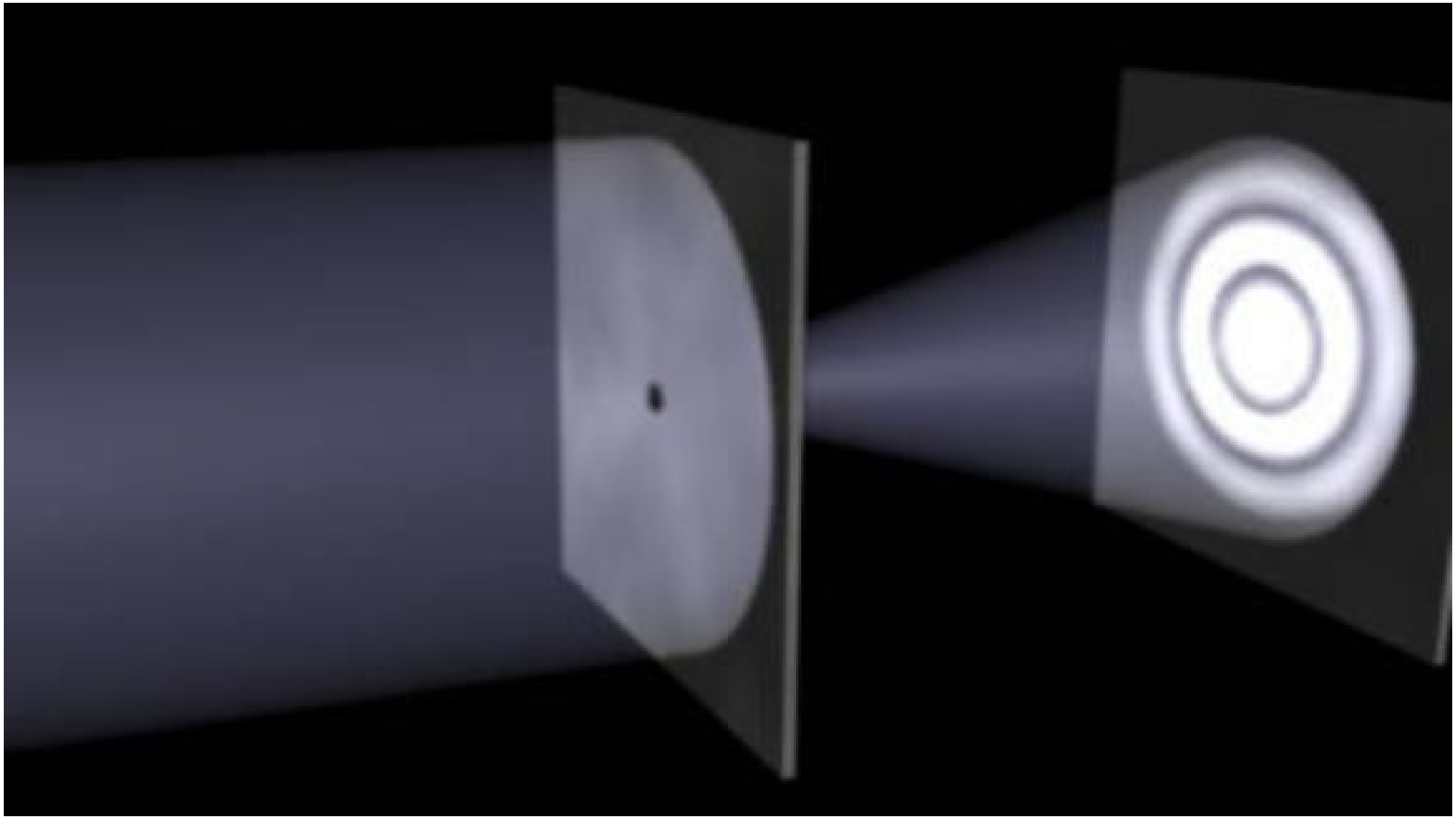
当 $r=0$ 时 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{J_1(kar/z)}{kar/z}=\dfrac{1}{2}$

因此，衍射斑中心的强度分布为（光强）

$$I(0)=|A(0)|^2=\pi^2a^4$$

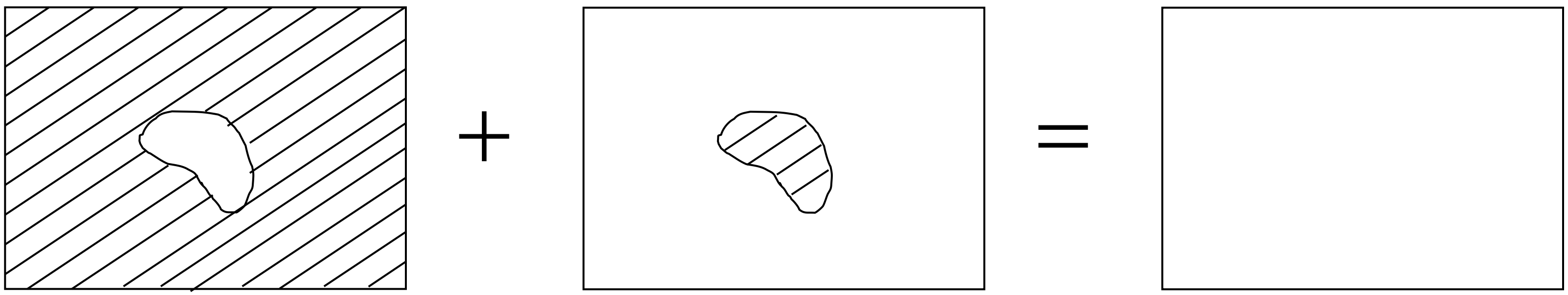
得：

$$I(r)=I(0)\left[\frac{2J_1(kar/z)}{kar/z}\right]$$



§2.6 巴比涅原理

一、互补屏的傅里叶变换



$$t_1(x) \quad + \quad t_2(x) \quad = \quad t(x) = 1$$

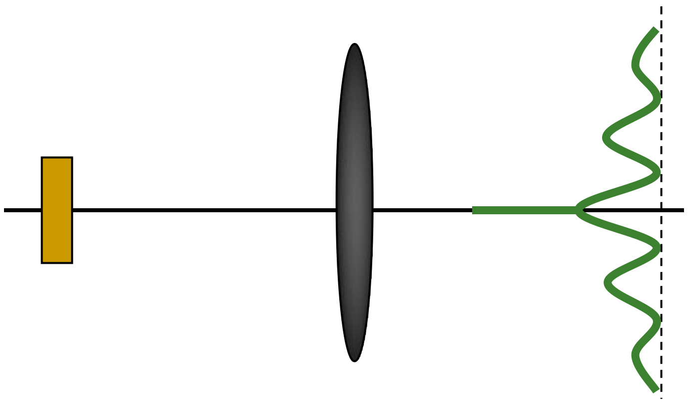
$$t_2(x) = t(x) - t_1(x)$$

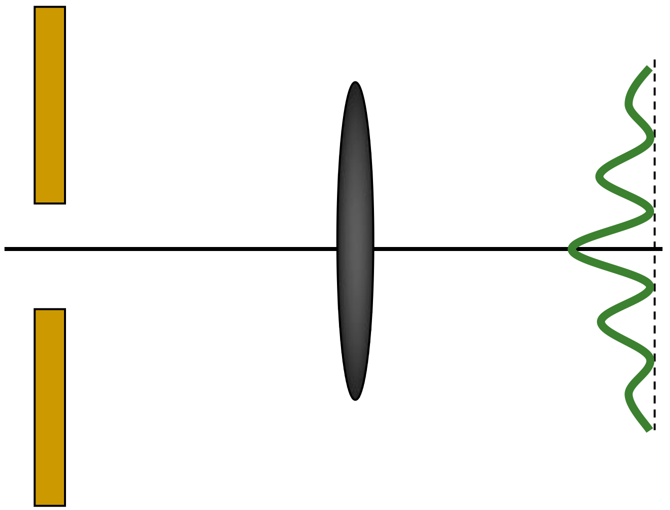
二、巴卑涅原理

$$F\{t_1(x)\} + F\{t_2(x)\} = F\{t(x)\}$$

两个互补屏在观察点产生的衍射光场，其复振幅之和等于光波自由传播时在该点的复振幅。

巴卑涅原理例证

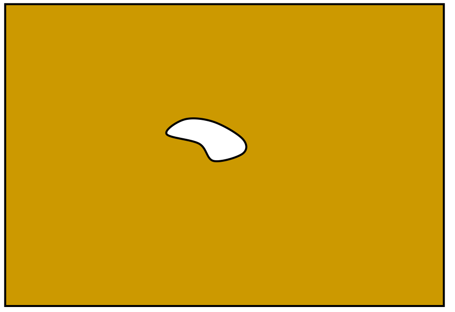




- § 2.7 衍射光栅

§ 2.7 衍射光栅

光栅：具有周期性重复排列的结构



一、列阵定理

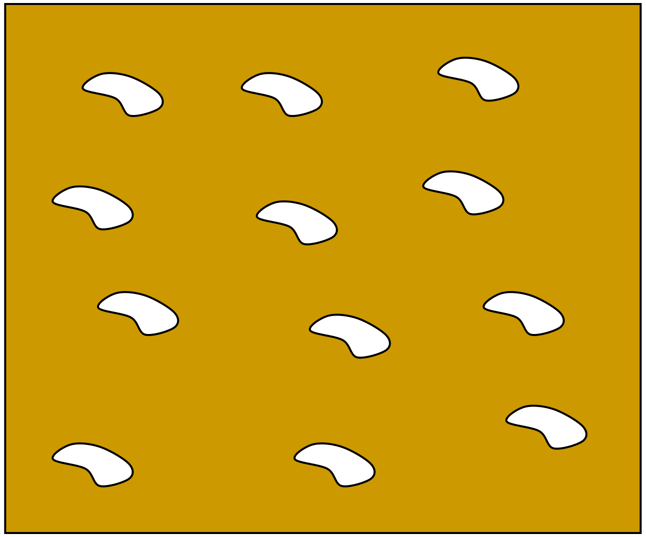
小孔透过率函数　　　　频谱

$$t_0(x_0, y_0) \qquad T_0(f_x, f_y)$$

小孔列阵？

小孔列阵

$$t(x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{N} t_0(x_0 - \xi_n, y_0 - \eta_n)$$



由δ函数的筛选性质

$$t(x_0, y_0) = t_0(x_0, y_0) \otimes \sum_{n=1}^{N} \delta(x_0 - \xi_n, y_0 - \eta_n)$$

小孔列阵衍射屏的傅里叶变换频谱为

$$
\begin{aligned}
T(f_x, f_y) &= F\{t(x_0, y_0)\} \\
&= F\{t_0(x_0, y_0)\} \times F\{\sum_{n=1}^{N} \delta(x_0 - \xi_n, y_0 - \eta_n)\} \\
&= T_0(f_x, f_y) \times \sum_{n=1}^{N} \exp[-i2\pi(f_x \xi_n + f_y \eta_n)]
\end{aligned}
$$

列阵定理：

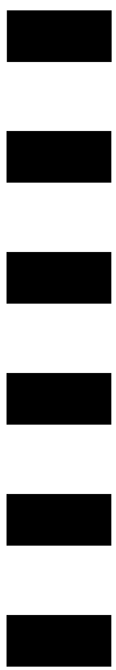
取向相同的同形孔径构成的列阵，其频谱等于单个基元孔径频谱与排列成同样组态的点光源列阵的频谱的乘积。

衍射屏的功率谱

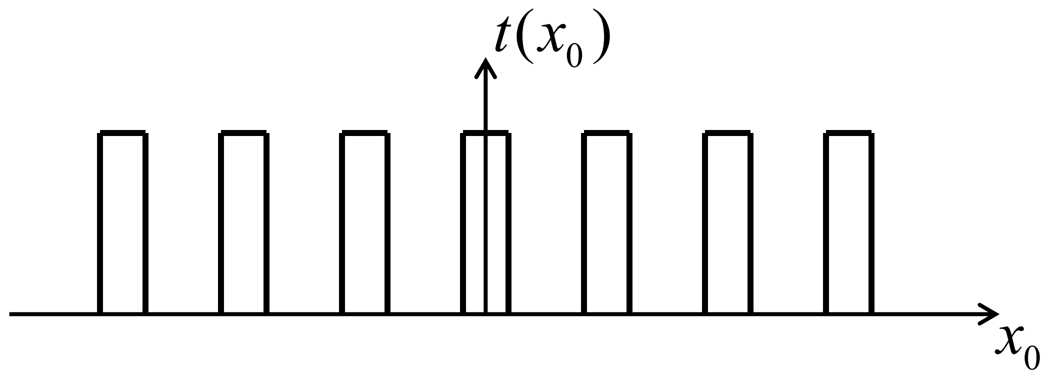
$$\left|T(f_x,f_y)\right|^2 = \underbrace{\left|T_0(f_x,f_y)\right|^2}_{\text{单个孔径衍射的调制}} \times \underbrace{\left|\sum_{n=1}^{N}\exp[-i2\pi(f_x\xi_n,f_y\eta_n)]\right|^2}_{\text{多个孔径的干涉}}$$

二、线光栅

刻划光栅



透过率函数



$$t(x_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - nd)$$

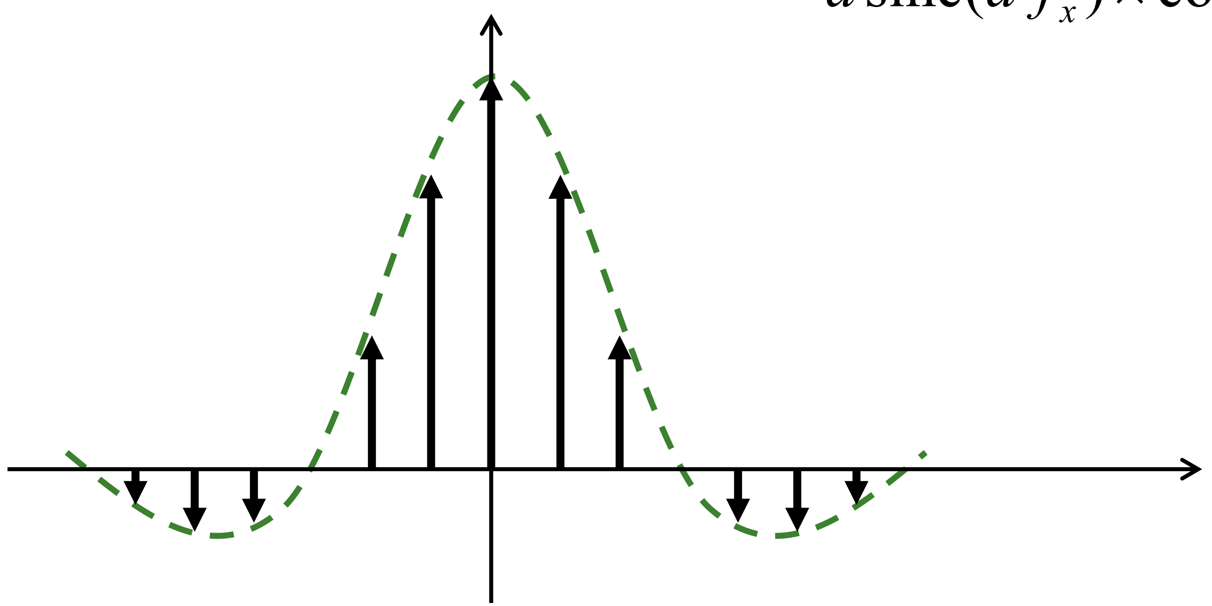
1. 无穷大列阵

$$t(x_0)=\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\otimes\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x_0-nd)$$

光栅的频谱

$$T(f_x)=F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{a}\right)\right\}\times F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x_0-nd)\right\}$$

$$=a\,\mathrm{sinc}(a\,f_x)\times\mathrm{comb}(d\,f_x)$$



2. 有限方形列阵(边长 L)

$$t(x_0, y_0) = \left[\mathrm{rect}(\frac{x_0}{a}) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - nd)\right] \times \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)$$

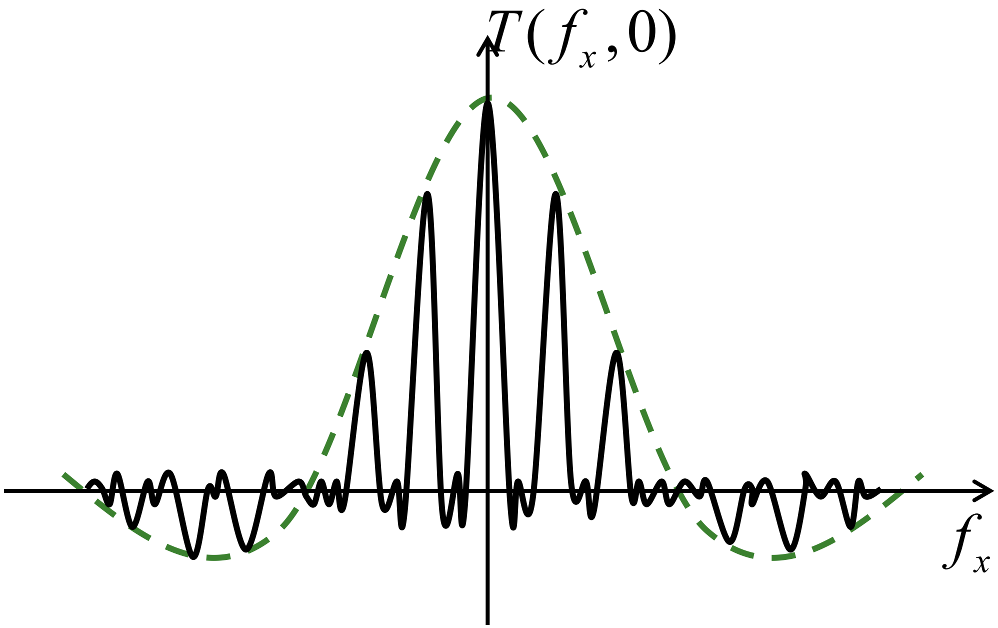
频谱为

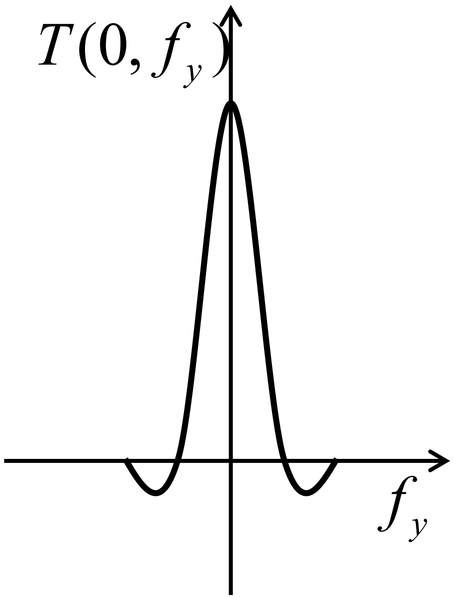
$$T(f_x, f_y) = \left[a\ \mathrm{sinc}(a\, f_x) \times \mathrm{comb}(df_x)\right] \otimes L^2 \mathrm{sinc}\left(Lf_x\right)\mathrm{sinc}\left(Lf_y\right)$$

$$= \frac{a}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(af_x)\delta(f_x - \frac{n}{d}) \otimes L^2 \mathrm{sinc}\left(Lf_x\right)\mathrm{sinc}\left(Lf_y\right)$$

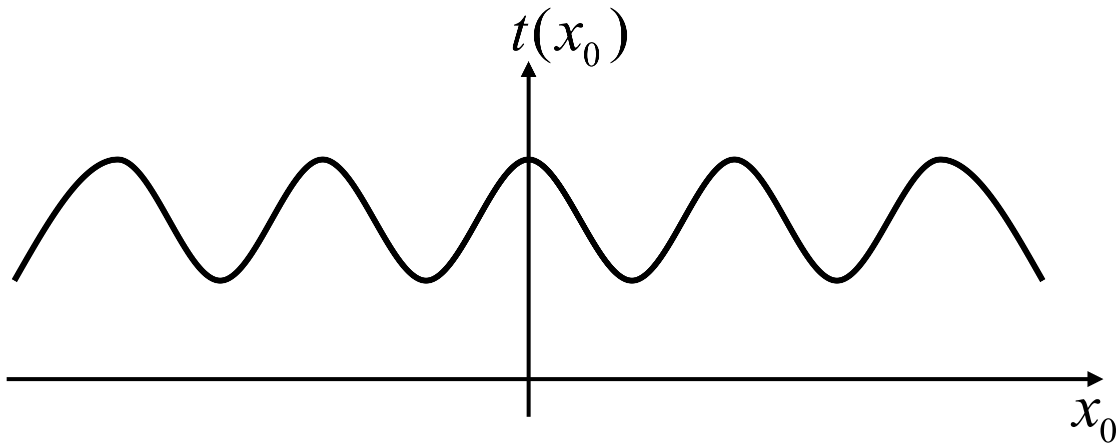
$$= \frac{aL^2}{d}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\frac{na}{d})\,\mathrm{sinc}\left[L\left(f_x - \frac{n}{d}\right)\right]\mathrm{sinc}\left(Lf_y\right)$$

光栅的频谱





三、余弦振幅光栅



透过率函数 $t(x_0, y_0) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_0)\right] \times \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)$

$\frac{m}{2}$ 余弦变化的幅度

$f_0 >> 2/L$ 光栅频率

光栅频谱 $$T(f_x, f_y) = F\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_0)\right\} \otimes F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)\right\}$$

$$F\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 x_0)\right\} = \frac{1}{2}\delta(f_x, f_y) + \frac{m}{4}\delta(f_x + f_0, f_y) + \frac{1}{4}\delta(f_x - f_0, f_y)$$

$$F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)\right\} = L^2 \mathrm{sinc}(Lf_x) \times \mathrm{sinc}(Lf_y)$$

$$T(f_x, f_y) = \frac{L^2}{2}\mathrm{sinc}(Lf_y)\left\{\mathrm{sinc}(Lf_x) + \frac{m}{2}\mathrm{sinc}[L(f_x + f_0)] + \frac{m}{2}\mathrm{sinc}[L(f_x - f_0)]\right\}$$

弗朗禾费衍射

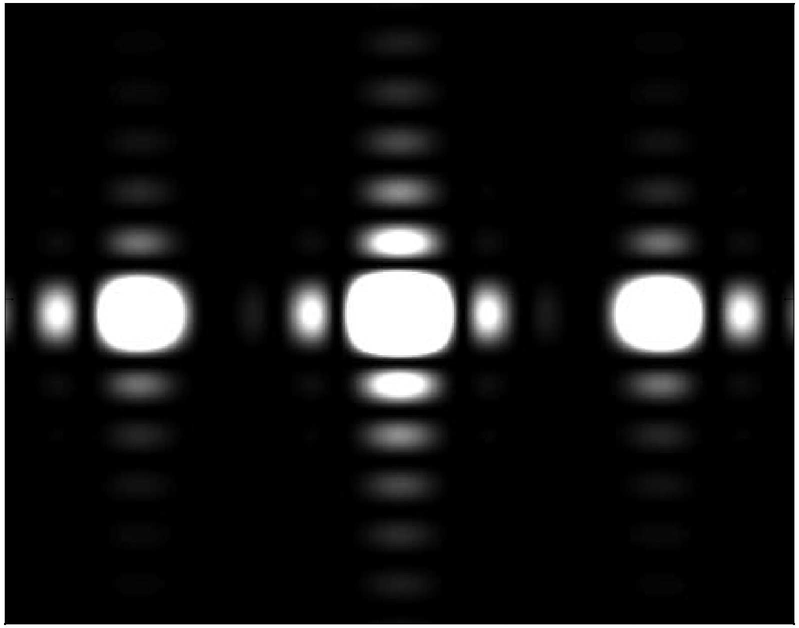
$$U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\exp[ikz]\exp[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)]\times T(f_x,f_y)\Big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z},\,f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

$$=\frac{1}{i\lambda z}\exp[ikz]\exp[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)]\frac{L^2}{2}\operatorname{sinc}(L\frac{y}{\lambda z})$$

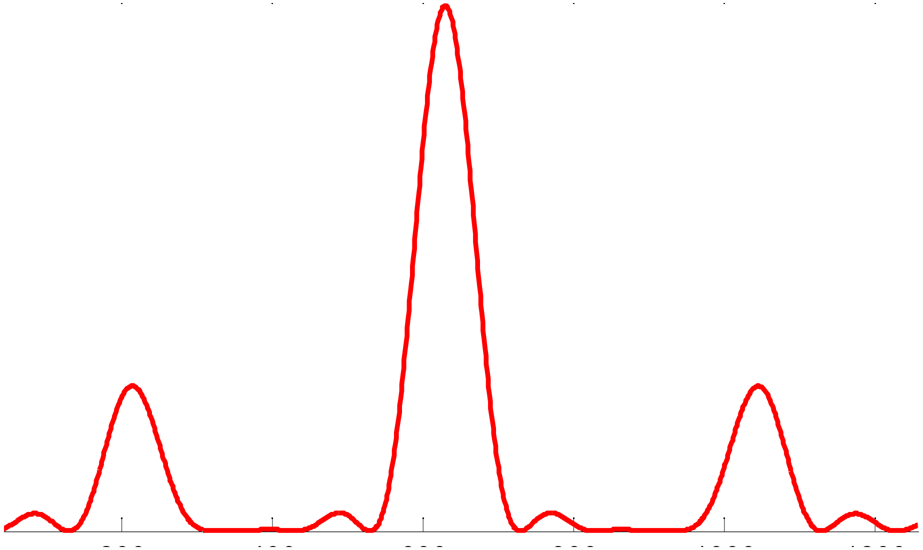
$$\times\left\{\operatorname{sinc}(L\frac{x}{\lambda z})+\frac{m}{2}\operatorname{sinc}[L(\frac{x}{\lambda z}+f_0)]+\frac{m}{2}\operatorname{sinc}[L(\frac{x}{\lambda z}-f_0)]\right\}$$

$$=\frac{1}{i\lambda z}\exp[ikz]\exp[i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)]\frac{L^2}{2}\operatorname{sinc}(\frac{Ly}{\lambda z})$$

$$\times\left\{\operatorname{sinc}(\frac{Lx}{\lambda z})+\frac{m}{2}\operatorname{sinc}[\frac{L}{\lambda z}(x+\lambda zf_0)]+\frac{m}{2}\operatorname{sinc}[\frac{L}{\lambda z}(x-\lambda zf_0)]\right\}$$



-1级 0级 +1级



-1级 0级 +1级

余弦振幅型光栅的分辨本领 $P = jN$

λ' 的光谱峰值在 λ 的光谱的谷值：

$$f_0\lambda' z - f_0\lambda z = \frac{\lambda z}{L}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} = f_0 L$$

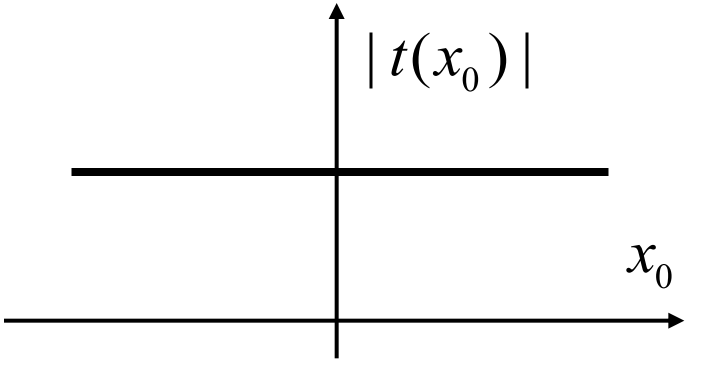
$$P = f_0 L = N$$

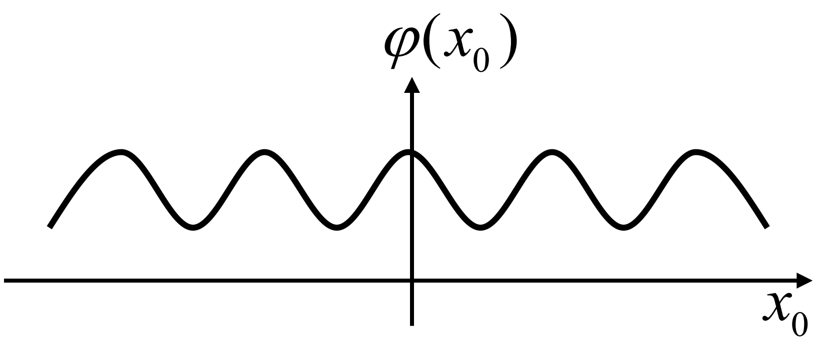
余弦振幅型光栅的分辨本领与光栅上的条纹数目成正比！

四、正弦相位光栅

透过率函数

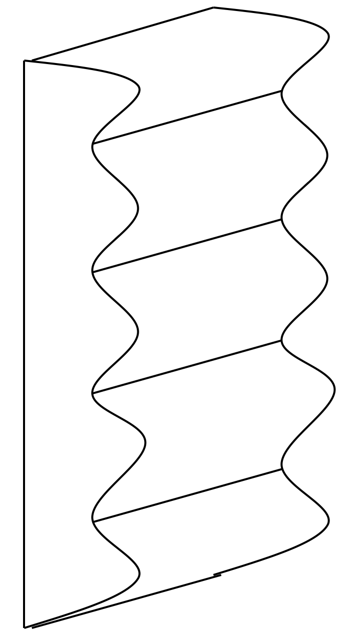
$$t(x_0, y_0) = \exp\left[i\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x_0)\right] \times \mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)$$





光栅频谱

$$T(f_x, f_y) = F\left\{\exp\left[i\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x_0)\right]\right\} \otimes F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)\right\}$$



利用贝赛尔函数的性质

$$F\left\{\exp\left[i\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x_0)\right]\right\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right)\delta(f_x - qf_0, f_y)$$

$$F\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)\right\} = L^2 \mathrm{sinc}(Lf_x) \times \mathrm{sinc}(Lf_y)$$

$$\boxed{T(f_x, f_y) = L^2 \mathrm{sinc}(Lf_y)\sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right)\mathrm{sinc}[L(f_x - qf_0)]}$$

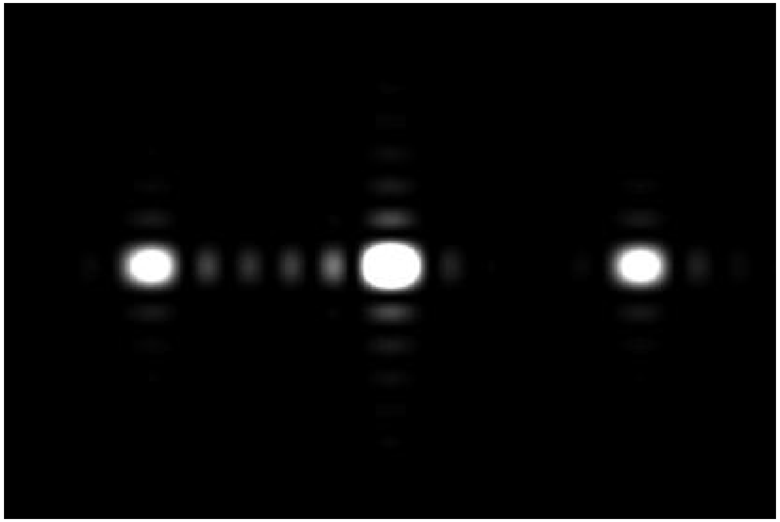
弗朗禾费衍射

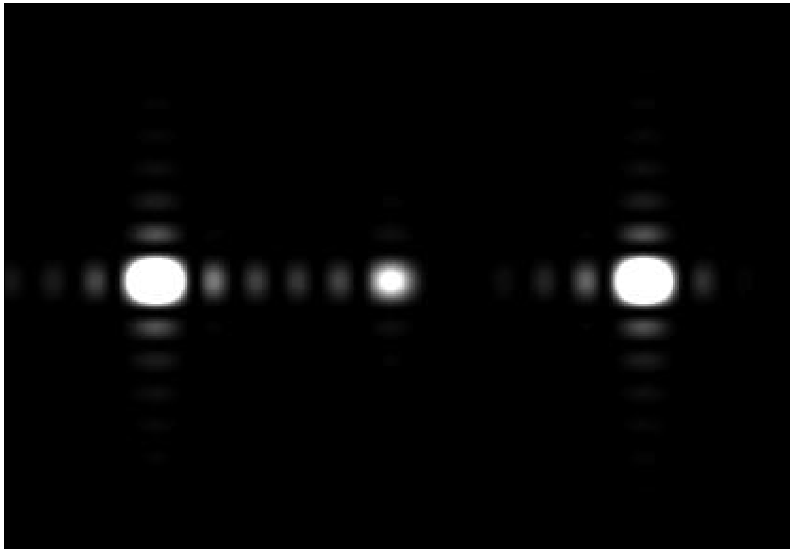
$$U(x,y)=\frac{1}{i\lambda z}\exp[ikz+i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)]T(f_x,f_y)\Big|_{f_x=\frac{x}{\lambda z},f_y=\frac{y}{\lambda z}}$$

$$=\frac{L^2}{i\lambda z}\exp[ikz+i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)]\mathrm{sinc}(\frac{Ly}{\lambda z})$$

$$\times\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q(\frac{m}{2})\mathrm{sinc}[\frac{L}{\lambda z}(x-q\lambda z f_0)]$$

理论模拟





m=1

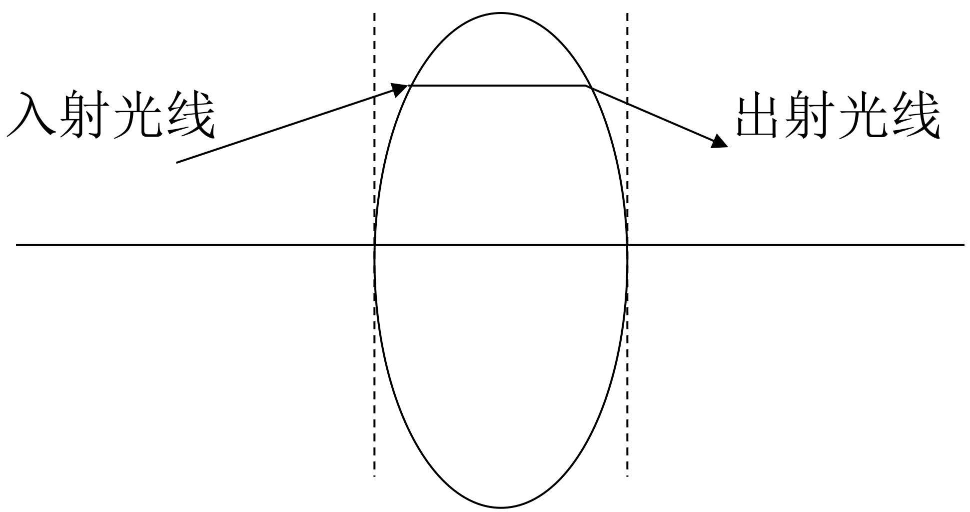
m=2

§ 3.1 透镜的位相调制作用

§ 3.2 透镜的傅立叶变换性质

§ 3.1 透镜的位相调制作用

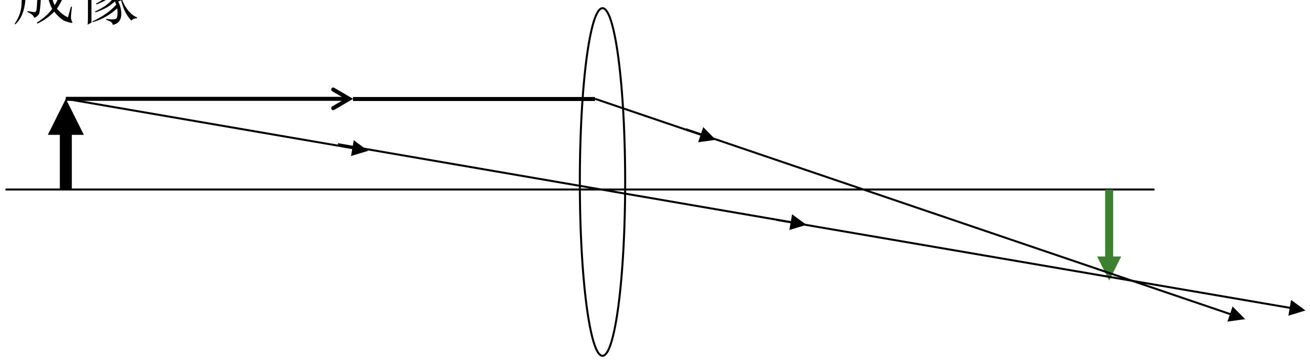
薄透镜是指：若一条光线从透镜的一面上坐标为(x, y)的点射入，而在相对的另一面也从近似相同的坐标处射出。可以忽略光线在透镜内的平移



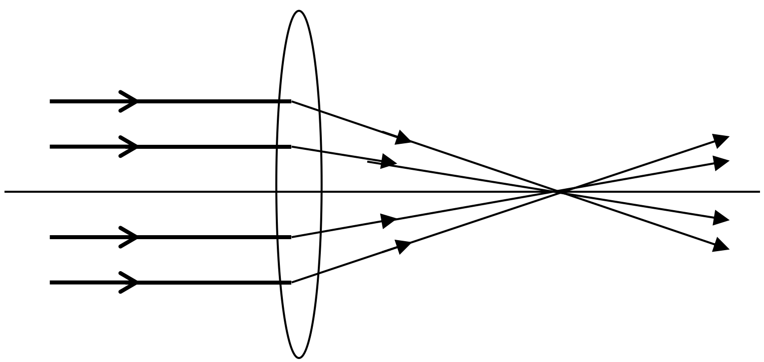
薄透镜的作用（1）成像（2）傅里叶变换

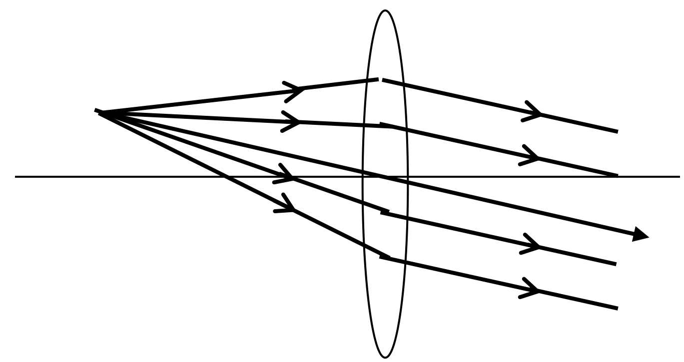
薄透镜的作用:

（1）成像



（2）傅里叶变换





一、透镜的复振幅透过率

$$t_l(x,y)=\frac{U_l'(x,y)}{U_l(x,y)}$$

其中透镜前表面光场复振幅：$U_l=a_l(x,y)\exp[i\varphi_l(x,y)]$

透镜后表面光场的复振幅　$U_l'=a_l'(x,y)\exp[i\varphi_l'(x,y)]$

$$t_l(x,y)=\frac{a_l'(x,y)}{a_l(x,y)}\exp[i\varphi_l'(x,y)-i\varphi_l(x,y)]$$

$$=A(x,y)\exp[i\varphi(x,y)]$$

若忽略透镜对入射光能量的损耗(忽略吸收和反射),

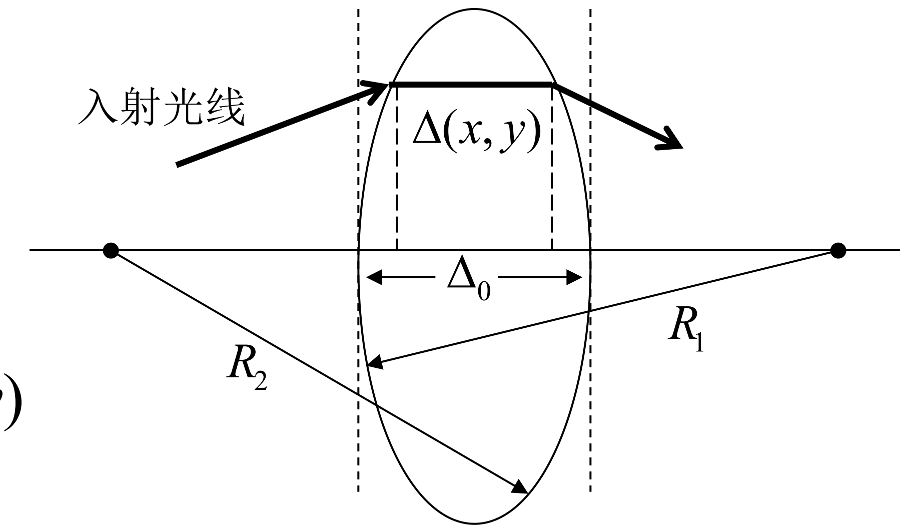
$$A(x,y)=1$$

$$t_l(x,y)=\exp\left[i\varphi(x,y)\right]$$

透镜对入射光场的作用：光场位置不变，但有位相移动，薄透镜相当于一个位相变换器。

二、薄透镜的位相变换函数

1.透镜厚度函数



透镜的最大厚度为Δ_0

在位置(x,y)处的厚度为$\Delta(x,y)$

光线通过透镜(x,y)处产生的位相落后

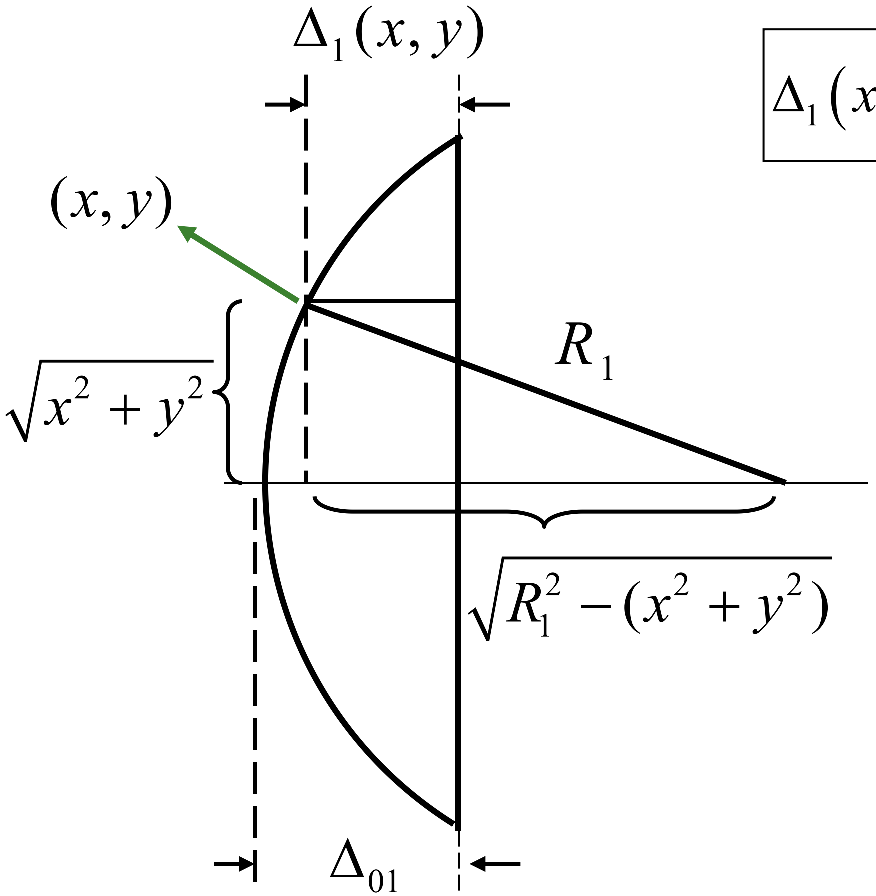
$$\varphi(x,y)=kr=kn\Delta(x,y)+k\left[\Delta_0-\Delta(x,y)\right]$$

振幅透过率函数 $t_l(x,y)=\exp[ik\Delta_0]\exp\left[ik(n-1)\Delta(x,y)\right]$

应用笛卡尔符号法则：
由球面的顶点量到球心，光线自左向右传播，向左为负，向右为正。

在本例中 $R_1 > 0, \quad R_2 < 0$

$$\Delta(x,y) = \Delta_1(x,y) + \Delta_2(x,y)$$

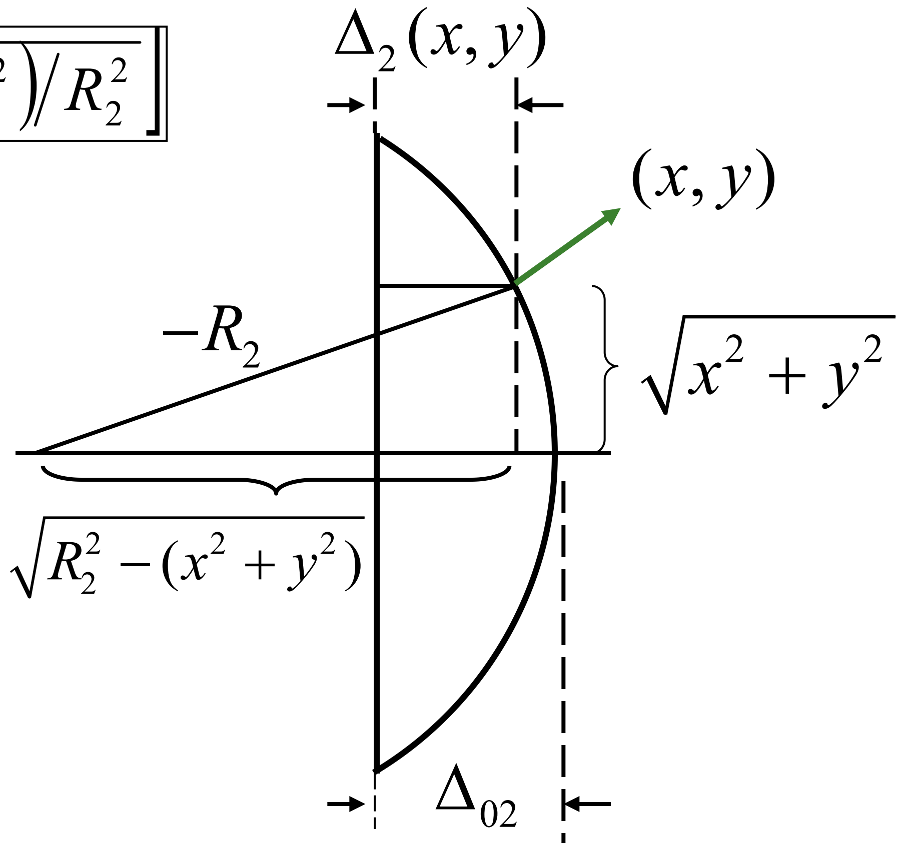


$$\Delta_1(x,y) = \Delta_{01} - \left(R_1 - \sqrt{R_1^2 - \left(x^2+y^2\right)}\right)$$

$$= \Delta_{01} - R_1[1 - \sqrt{1 - \left(x^2+y^2\right)/R_1^2}\,]$$

$$\boxed{\Delta_2(x,y) = \Delta_{02} - \left(-R_2 - \sqrt{R_2^2 - \left(x^2 + y^2\right)}\right)}$$

$$\boxed{= \Delta_{02} + R_2\left[1 - \sqrt{1 - \left(x^2 + y^2\right)/R_2^2}\right]}$$



$$\Delta(x,y)=\Delta_0-R_1\left[1-\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)/R_1^2}\right]+R_2\left[1-\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)/R_2^2}\right]$$

式中： $\Delta_0=\Delta_{01}+\Delta_{02}$

近轴近似条件，认为透镜中心区域的范围 (x,y) 远远小于两球面的半径，将 $\Delta(x,y)$ 按照小量 $(x^2+y^2)/R_1^2$ 和 $(x^2+y^2)/R_2^2$ 进行泰勒级数展开

泰勒级数展开式中，忽略小量的高阶项，得

$$\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)/R_1^2} \approx 1-\frac{x^2+y^2}{2R_1^2}, \qquad \sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)/R_2^2} \approx 1-\frac{x^2+y^2}{2R_2^2}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) &= \Delta_0-\frac{x^2+y^2}{2R_1}+\frac{x^2+y^2}{2R_2}\\ &= \Delta_0-\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\end{aligned}$$

2.透镜的复振幅透过率

$$t(x,y)=\exp\left(ik\Delta_0\right)\times\ \exp\left\{ik\left(n-1\right)\cdot\left[\Delta_0-\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]\right\}$$

$$=\exp[ikn\Delta_0]\times\ \ \exp\left[-ik\left(n-1\right)\cdot\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

透镜焦距的定义 $\frac{1}{f}=\left(n-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

则公式改写为 $t_l\left(x,y\right)=\exp[ikn\Delta_0]\cdot\exp[-ik\frac{x^2+y^2}{2f}]$

$$t_l(x,y) = \exp[ikn\Delta_0]\cdot\exp[-ik\frac{x^2+y^2}{2f}]$$

--------------------透镜对入射光场的相位调制作用

其中第一项 $\exp[ikn\Delta_0]$ 表示透镜对入射光场的常数相位延迟并不会影响相位的空间分布，可在讨论中略去不计。

第二项的相位因子表明光波经过透镜的相位延迟与该点到透镜中心的距离的平方成正比，而与透镜的焦距成反比，出射光场体现处与球面波相类似的特点。

以上结论可以推广到各种类型的透镜系统！

◆ 平面波入射时出射光场的性质

假定单位振幅的平面波入射到透镜入射平面上的复振幅分布为 $U_l(x, y) = 1$

略去常数相位因子后得到输出平面上光场的复振幅分布为

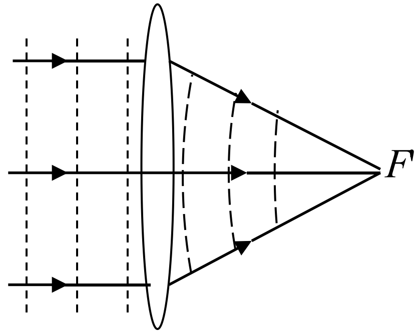
$$U_l'\left(x, y\right) = \exp[-ik\frac{x^2 + y^2}{2f}]$$

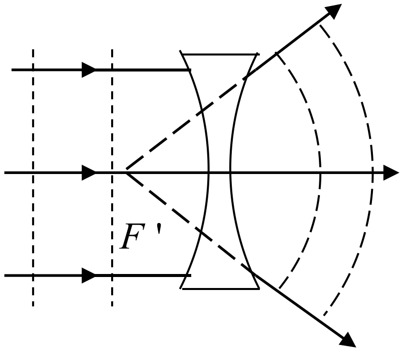
如果考虑透镜本身的尺寸，
可引入光瞳函数表示透镜的分振幅透过率

$$t_l(x,y)=\exp[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)]\times P(x,y)$$

其中$P(x,y)$表示透镜的有限孔径

$$P(x,y)=\begin{cases}1, & \text{in the pupil}\\ 0, & \text{out of the pupil}\end{cases}$$





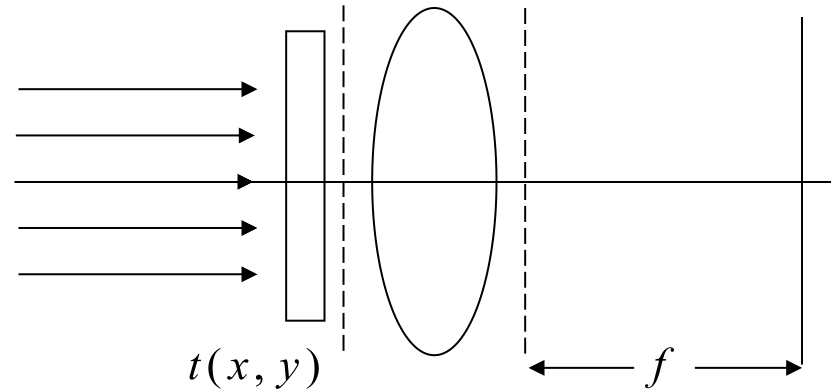
§3.2 透镜的傅立叶变换性质

一、物体紧靠透镜放置

物体　$t(x,y)$

透镜　$\exp[-i\dfrac{k}{2f}(x^2+y^2)]$

自由传播（菲涅尔衍射）f



$$\frac{1}{i\lambda f}\exp[i\frac{k}{2f}(x_f^2+y_f^2)]\times F\left\{U(x,y)\exp[i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)]\right\}$$

入射光场可表示为 $U_l(x,y)=At(x,y)$

忽略透镜有限孔径的限制，它的复振幅透过率函数为

$$t_l(x,y)=\exp[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)]$$

透镜出射平面的光场复振幅分布为

$$\begin{aligned}U_l'(x,y)&=U_l(x,y)\cdot t_l(x,y)\\&=At(x,y)\exp[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)]\end{aligned}$$

光波从透镜传播 f 距离，到达后焦平面上所产生的场分布可根据菲涅尔衍射公式进行计算

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f}\exp[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)]\cdot$$

$$F\left\{U_l'(x, y)\exp[i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)]\right\}$$

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{A}{i\lambda f} \exp[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + x_f^2)] \times F\left\{t(x, y)\right\}$$

$$= \frac{A}{i\lambda f} \exp[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + x_f^2)] \cdot T(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f})$$

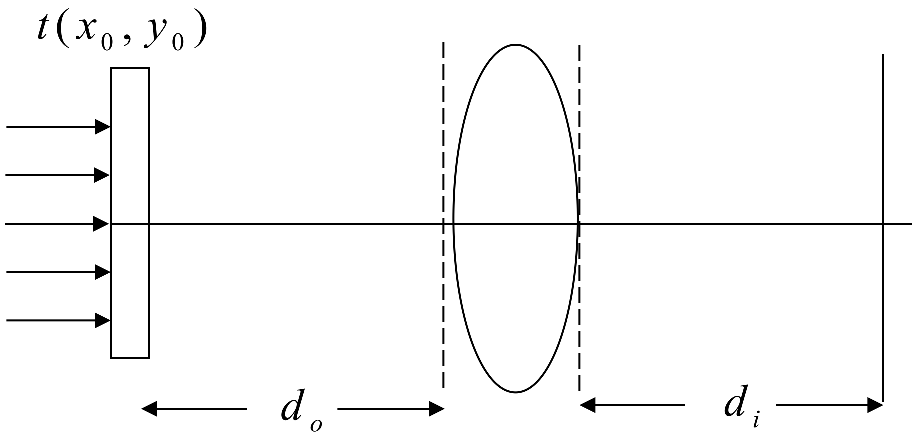
- 透镜后焦平面上光场的分布正比于物体的傅里叶变换
- 变换式前存在位相因子 $\exp[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + x_f^2)]$

记录的是观察平面上的强度分布，相位变化并不会对强度分布造成影响，所以强度分布

$$
\begin{aligned}
I_f(x_f, y_f) &= \left|U_f(x_f, y_f)\right|^2 \\
&= \left(\frac{A}{\lambda f}\right)^2 \cdot \left|T\left(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f}\right)\right|^2
\end{aligned}
$$

与物体的功率谱成正比!

二、物体位于透镜前



物面上的复振幅

$$U(x_0, y_0) = t(x_0, y_0)$$

透镜前表面（光波按菲涅耳衍射）

$$U_1(x, y) = \frac{1}{-i\lambda d_0} \iint_{\Sigma_0} U(x_0, y_0) \exp[ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(-d_0)}] dx_0 dy_0$$

忽略透镜有限孔径的限制，它的复振幅透过率函数为

$$t_l(x,y)=\exp[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)]$$

透镜后表面光场的复振幅为

$$U_2(x,y)=U_1(x,y)\exp[-ik\frac{x^2+y^2}{2f}]$$

象面上光波又一次菲涅耳衍射

$$U\left(x_i, y_i\right)=\frac{1}{i\lambda d_i}\iint_{\Sigma_p} dxdy\cdot U_2\left(x, y\right)\exp\left[ik\frac{\left(x_i-x\right)^2+\left(y_i-y\right)^2}{2d_i}\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}\iint_{\Sigma_P} dxdy\exp\left[ik\frac{\left(x_i-x\right)^2+\left(y_i-y\right)^2}{2d_i}-ik\frac{x^2+y^2}{2f}\right]$$

$$\times\iint_{\Sigma_0} dx_0 dy_0 U\left(x_0, y_0\right)\exp[ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2(-d_0)}]$$

$$
= \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \times \iint_{\Sigma_0} \iint_{\Sigma_P} dx dy dx_0 dy_0 U\left(x_0, y_0\right) \exp\left[ik \frac{x^2 + y^2}{2} (\frac{1}{d_i} + \frac{1}{-d_0} - \frac{1}{f})\right]
$$

$$
\exp\left[-ikx\left(\frac{x_i}{d_i} + \frac{x_0}{-d_0}\right) - iky\left(\frac{y_i}{d_i} + \frac{y_0}{-d_0}\right)\right]
$$

$$
\exp\left\{ik\left[\frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_i} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2(-d_0)}\right]\right\}
$$

1. 当 $\frac{1}{d_i}+\frac{1}{-d_0}-\frac{1}{f}=0$

$$U\left(x_i, y_i\right)=\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}\times\iint_{\Sigma_0} dx_0 dy_0 U\left(x_0, y_0\right)\exp\left\{ik\left[\frac{x_i^2+y_i^2}{2d_i}+\frac{x_0^2+y_0^2}{2(-d_0)}\right]\right\}$$

$$\iint dxdy\exp\left[-ikx\left(\frac{x_i}{d_i}+\frac{x_0}{-d_0}\right)-iky\left(\frac{y_i}{d_i}+\frac{y_0}{-d_0}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}\times\iint_{\Sigma_0} dx_0 dy_0 U\left(x_0, y_0\right)\exp\left\{ik\left[\frac{x_i^2+y_i^2}{2d_i}+\frac{x_0^2+y_0^2}{2(-d_0)}\right]\right\}$$

$$\delta\left(\frac{x_i}{\lambda d_i}+\frac{x_0}{-\lambda d_0},\frac{y_i}{\lambda d_i}+\frac{y_0}{-\lambda d_0}\right)$$

$$=\frac{1}{d_0 d_i}\times U\left(\frac{d_0}{d_i}x_i,\frac{d_0}{d_i}y_i\right)\exp\left\{ik\frac{x_i^2+y_i^2}{2}\left[\frac{1}{d_i}-\frac{d_0}{d_i^2}\right]\right\}$$

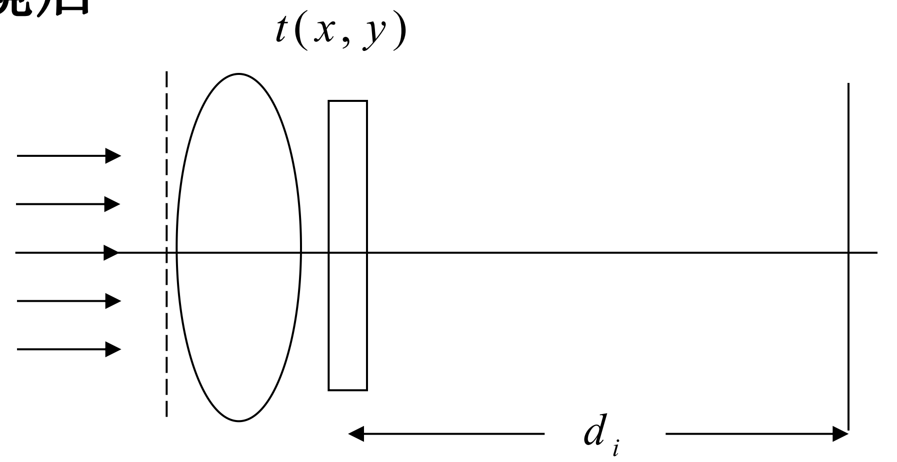
2.当$d_i = f$

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \times \exp\left[-i\frac{k}{2f}(1-\frac{d_0}{f})(x_f^2 + y_f^2)\right] \times T(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f})$$

- 满足高斯透镜的物象公式时 $\frac{1}{d_i} + \frac{1}{-d_0} = \frac{1}{f}$，几何光学成像
- 在焦平面上观察，得到物体的傅里叶频谱

$$x_f = \frac{x_f}{\lambda f}, \quad y_f = \frac{y_f}{\lambda f}$$

三、物体位于透镜后



透镜 $\exp\left[-ik\dfrac{x^2+y^2}{2f}\right]$

物之后的光场 $O_1(x, y) = \exp\left[-ik\dfrac{x^2+y^2}{2f}\right] \times t(x, y)$

象面上（菲涅耳衍射）

$$U\left(x_i y_i\right)=\frac{1}{i\lambda d_i}\iint_{\Sigma} O_1\left(x, y\right)\exp[ik\frac{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2}{2d_i}]dxdy$$

$$=\frac{1}{i\lambda d_i}\cdot\exp\left[ik\frac{(x_i^2+y_i^2)}{2d_i}\right]\times$$

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} t\left(x, y\right)\exp[ik(x^2+y^2)(\frac{1}{2d_i}-\frac{1}{2f})-ik\frac{x_i x+y_i y}{d_i}]dxdy$$

◆当 $d_i = f$

$$U(x_i, y_i) = \frac{1}{if} \cdot \exp\left[ik\frac{(x_i^2 + y_i^2)}{2f}\right] \times \int\int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \exp[-ik\frac{x_i x + y_i y}{f}] dxdy$$

$$= \frac{1}{i\lambda f} \exp[i\frac{k}{2f}(x_f^2 + x_f^2)] \cdot T(\frac{x_f}{\lambda f}, \frac{y_f}{\lambda f})$$

与物体放置透镜平面前光场相同!

小结

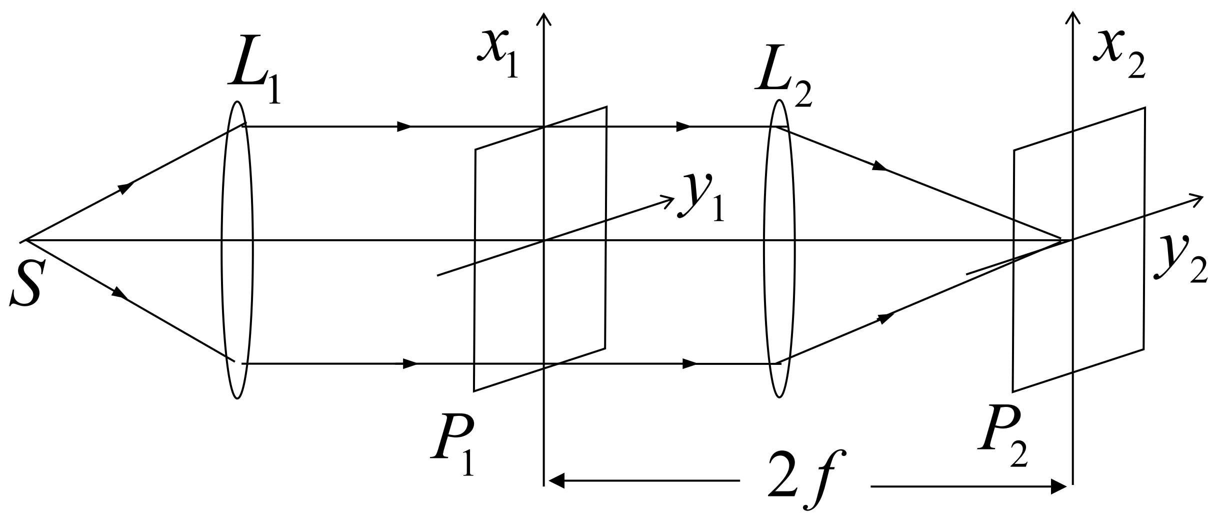
- 几何光学成像与菲涅耳近似一致;
- 无论物体放在何处，在近轴近似下，透镜后焦平面上的光场分布可以看作时物体的频谱;
- 如果对物体的频谱操作，只需要改变后焦平面的光场分布即可。

§3.3 光学频谱分析

§3.3 光学频谱分析

一、光学频谱分析的原理

频谱分析的光学系统



输出光场分布正比于物体的空间频谱$T(fx, fy)$

$$U(f_x, f_y) = C \cdot F\left\{t(x_1, y_1)\right\} = C \cdot T(f_x, f_y)$$

或者 $$U(x_2, y_2) = CT\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right)$$

强度记录得到物体的功率谱为

$$I(x_2, y_2) = C^2 \left| T\left(\frac{x_2}{\lambda f}, \frac{y_2}{\lambda f}\right) \right|^2$$

二、频谱分析的应用

光学方法实现傅里叶变换的光学装置简单，信息容量大。

1.通过对物体的弗朗禾费衍射图样的测量来确定物体的形状尺寸。物体越小，其频谱展开越宽，频谱测量更为容易。

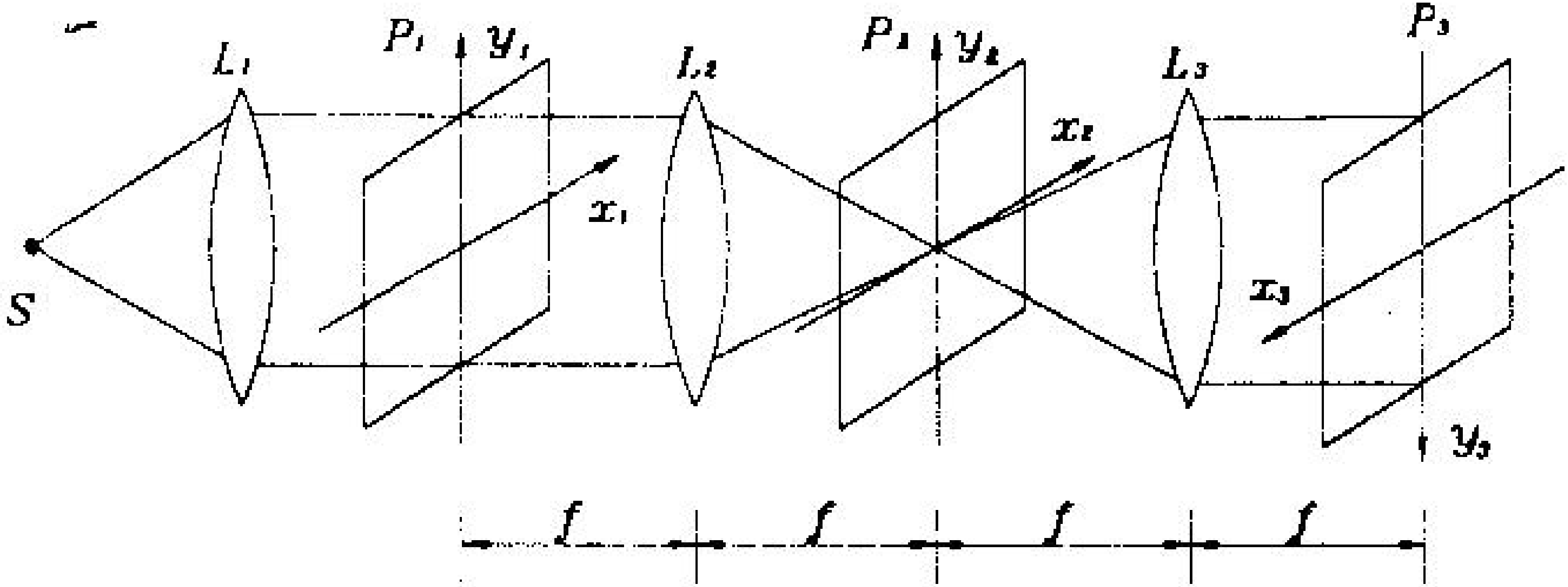
2. 对悬浮颗粒、粉尘作尺寸分析。粒子尺寸越小，频谱越扩展。由于傅里叶变换的位移性质，粒子在测量期间移动，不会影响衍射图杨的位置和强度分布，为探测提供了方便。

光学频谱分析还适用于图像分析。

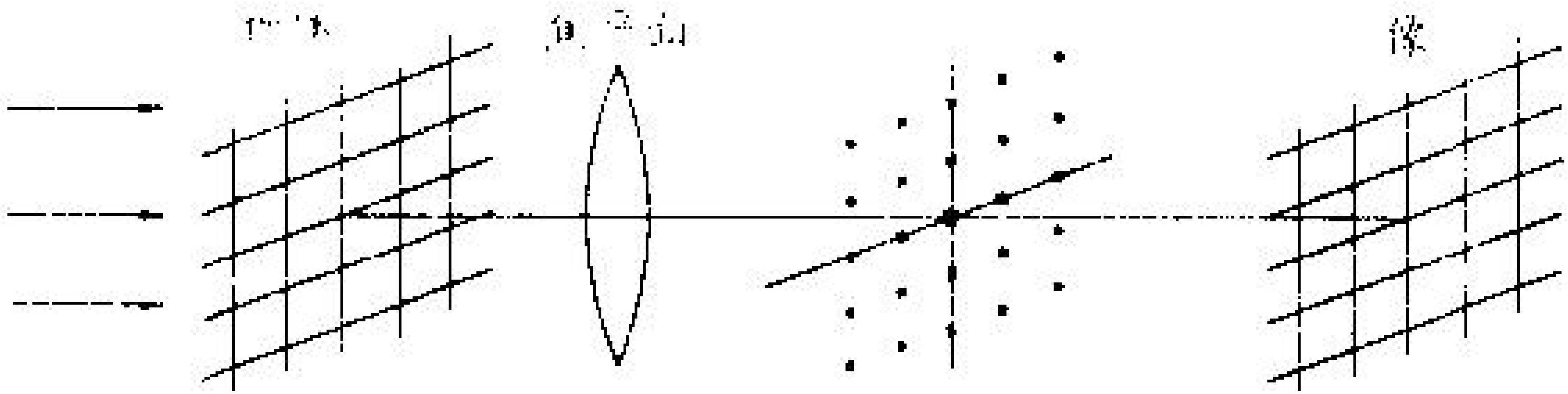
3. 特别适用于大量数据的快速、非精确测量.

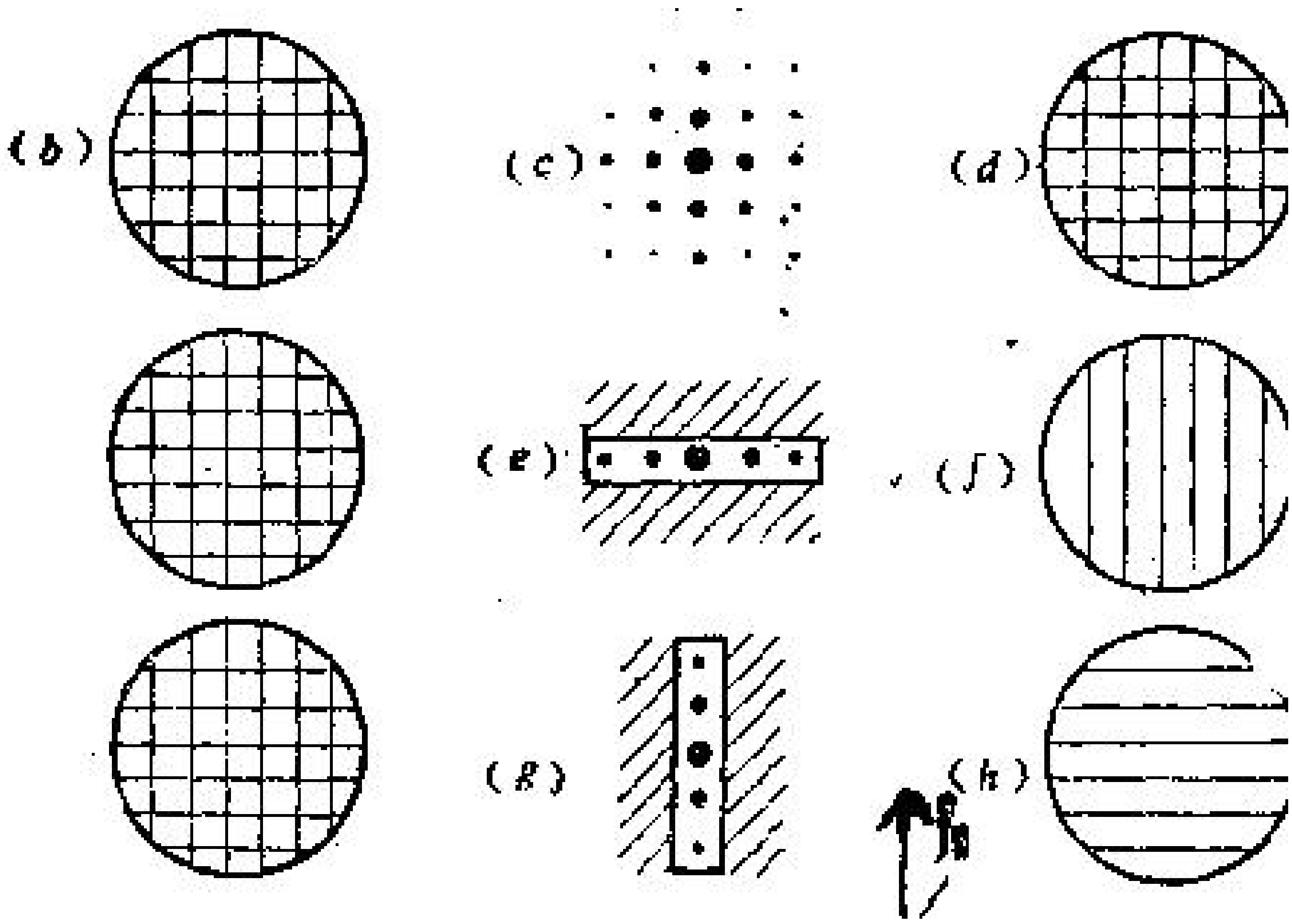
三、阿贝—波特实验

- 实验光路



- 实验结果




(b)
(c)
(d)
(e)
(f)
(g)
(h)

本章小节

- 透镜的近似处理
  相位变换器

$$\exp[-\frac{x^2+y^2}{2f}]$$

- 透镜的傅里叶变换作用
  焦平面处空间频谱处理！

第四章 光学成像系统的频率响应

第四章 光学成像系统的频率响应

§4.1 相干照明衍射受限系统的脉冲响应函数

§ 4.2 相干照射下衍射受限系统的成像规律

§4.1 相干照明衍射受限系统的脉冲响应函数

光学成像系统：用来传递物的结构、灰度和色彩等信息。

像质评价：评价成像质量的好坏。

空域中像质检验: 鉴别率板法和星点检验法

空间频谱分析方法:光学传递函数

脉冲响应函数或**点扩散函数**:

面元的光振动为单位脉冲 δ 函数时的像场分布函数。

脉冲响应函数通常用$h(x_0,y_0;x_i,y_i)$ 表示，表示物平面上 (x_0,y_0) 点的单位脉冲经成像系统后在像平面 (x_i,y_i) 点产生的光场分布。

$$h(x_0,y_0;x_i,y_i)=F\{\delta(x-x_0,y-y_0)\}$$

像平面上光场复振幅分布

$$g(x_i,y_i)=\iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0,y_0)h(x_0,y_0;x_i,y_i)dx_0dy_0$$

一、透镜的脉冲响应函数

物体的复振幅分布

$$U(x'_0, y'_0)$$

点 (x'_0, y'_0)处发出的单位脉冲

$$\delta(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0)$$

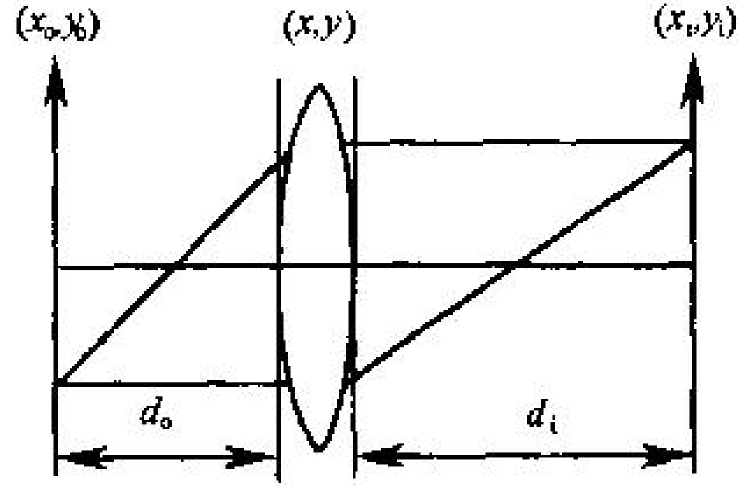


图4.1.1 透镜脉冲响应函数简图

任务：逐面计算三个特定平面上的场分布

紧靠透镜前后的两个平面上的场分布 dU_1 和 dU'_1

观测平面上的场分布 h

$$dU_1'(x_0', y_0'; x, y) = \frac{e^{ikd_0}}{i\lambda d_0} \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0 - x_0', y_0 - y_0') e^{\frac{ik}{2d_o}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} dx_0 dy_0$$

$$= \frac{\exp[ikd_o]}{i\lambda d_0} \exp\{\frac{ik}{2d_0}[(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2]\}$$

$$dU_1'(x_0, y_0; x, y) = P(x, y) \exp[-\frac{ik}{2f}(x^2 + y^2)] dU_1(x_0, y_0; x, y)$$

$$h(x_0, y_0; x_i, y_i) = \frac{e^{ikd_i}}{i\lambda d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} dU_1'(x_0, y_0; x, y) e^{\frac{ik}{2d_i}[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]} dxdy$$

$$= \frac{e^{ik(d_0 + d_i)}}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y)$$

$$\times e^{-\frac{ik}{2f}(x^2 + y)^2 + \frac{ik}{2d_o}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + \frac{ik}{2d_i}[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]} dxdy$$

物像平面的共轭关系满足高斯公式 $$\frac{1}{f}=\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_0}$$

忽略常数相位因子并简化后得

$$h(x_0,y_0;x_i,y_i)=\frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i}\exp[ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2d_0}+ik\frac{x_i^{\ 2}+y_i^{\ 2}}{2d_i}]\times$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-ik[(\frac{x_i}{d_i}+\frac{x_0}{d_0})x+(\frac{y_i}{d_i}+\frac{y_0}{d_0})y]\right\}dxdy$$

相位因子 $\exp[ik\frac{x_i^{\ 2}+y_i^{\ 2}}{2d_i}]$ 不影响探测强度分布，可以略去。

相位因子 $\exp[ik\frac{x_0^2+y_0^2}{2d_0}]$ 参与像面光场的贡献，不能简单略去。

当透镜的孔径比较大时，物面上每一物点产生的脉冲响应是一个很小的像斑，那么能够对于像面上（x_i, y_i）点光场产生有意义贡献的，必定是物面上以几何成像所对应的以物点为中心的微小区域。在这个区域内，可近似地认为 (x_0, y_0) 不变。

共轭物坐标 $x_0 = \frac{x_i}{M} \qquad y_0 = \frac{y_i}{M}$

式中 $M = -\frac{d_i}{d_0}$ 是成像透镜的横向放大率。

$$\exp[ik\frac{x_0^2 + y_0^2}{2d_0}] \approx \exp[ik\frac{x_i^2 + y_i^2}{2d_0 M^2}]$$

脉冲响应简化为

$$h(x_0, y_0; x_i, y_i) = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \times$$

$$\exp[-i2\pi \frac{\left(x_i - Mx_0\right)x + \left(y_i - My_0\right)y}{\lambda d_i}]dxdy$$

对物平面坐标 (x_0, y_0) 作坐标变换，令 $\tilde{x}_0 = Mx_0$， $\tilde{y}_0 = My_0$

于是

$$h\left(\frac{\tilde{x}_0}{M}, \frac{\tilde{y}_0}{M}; x_i, y_i\right) = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \times \exp\left[-i2\pi \frac{\left(x_i - \tilde{x}_0\right)x + \left(y_i - \tilde{y}_0\right)y}{\lambda d_i}\right] dxdy$$

即

$$h(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) = \frac{1}{\lambda^2 d_0 d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \times \exp\left[-i2\pi \frac{\left(x_i - \tilde{x}_0\right)x + \left(y_i - \tilde{y}_0\right)y}{\lambda d_i}\right] dxdy$$

在近轴成像条件下，上式所表征的透镜成像系统是空不变的；而且，透镜的脉冲响应就等于透镜孔径的夫琅和费衍射图样。

透镜孔径的衍射作用明显示与否，是由孔径线度相对于波长 λ 和像距 d_i 的比例决定的，为此，对孔径平面上的坐标 (x, y) 作如下坐标变换 $\tilde{x} = \dfrac{x}{\lambda d_i}, \tilde{y} = \dfrac{y}{\lambda d_i}$

透镜的脉冲响应函数

$$h(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) = |M| \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \times \exp\{-i2\pi\left[\left(x_i - \tilde{x}_0\right)\tilde{x} + \left(y_i - \tilde{y}_0\right)\tilde{y}\right]\} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

如果孔径大小(光瞳)相对于 λd_i 足够大，则认为 $\tilde{x},\tilde{y}$ 为无限大区域。

$$P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})=1$$

脉冲响应函数就可以进一步简化为

$$\begin{aligned} h(x_i-\tilde{x}_0,y_i-\tilde{y}_0) &= |M|\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\left[(x_i-\tilde{x}_0)\tilde{x}+(y_i-\tilde{y}_0)\tilde{y}\right]}d\tilde{x}d\tilde{y} \\ &= |M|\delta(x_i-\tilde{x}_0,y_i-\tilde{y}_0) \end{aligned}$$

这时，物点成像为一个像点，即理想成像。

像的位置在： $x_i=Mx_0,y_i=My_0$

这便是几何光学中点物-点像对应的情况。

二、衍射受限系统的脉冲响应函数

衍射受限系统，不考虑系统的几何像差，仅仅考虑系统的衍射限制

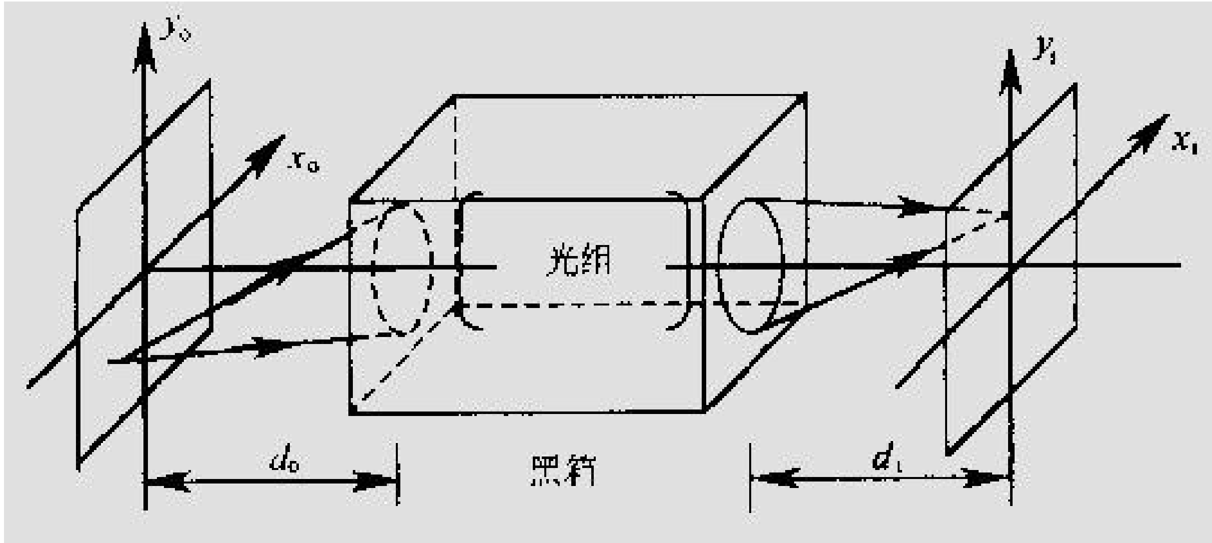
孔径光阑 (Aperture stop)：
或*有效光阑* (Effective stop)

决定系统光束大小的光阑。

入射光瞳(Entrance pupil)：孔径光阑通过它前面的光学系统(物空间) 所成的像，它决定关进入系统的光束的大小。

出射光瞳(Exit pupil): 孔径光阑通过它后面的光学系统 (像空间)所成的像，决定着从系统出射的光束的大小。

入射光瞳、孔径光阑和出射光瞳三者相互共轭。



一个成像系统的外部性质可以由入射光瞳或出射光瞳来描述。因此，成像系统可以归结为下列普遍模型：光波由物平面变换到像平面，可以分为3个过程，即光由物平面到入瞳面，再由入瞳面到出瞳面，最后由出瞳面到像平面。

光束限制的共轭原理：当光波通过成像系统时，波面受到入瞳的限制，变换到空间就成为出瞳对出射波的限制，这两种限制是等价的，是同一种限制在两个空间间的反映。

像平面上将产生以理想像点为中心的出瞳孔径的夫琅和费衍射花样

脉冲响应函数

$$h(x_0, y_0; x_i, y_i) = K\iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\times$$

$$\exp\left\{-\frac{i2\pi}{\lambda d_i}\left[\left(x_i - Mx_0\right)x + \left(y_i - My_0\right)y\right]\right\}dxdy$$

是物面上以 (x_0, y_0) 点的单位脉冲通过衍射受限系统后在与物面共轭的像面上的复振幅分布。

同样，对物平面上坐标 x_0, y_0 和光瞳平面上的坐标 x, y

做坐标变换 $\tilde{x}_0 = Mx_0, \tilde{y}_0 = My_0,\quad \tilde{x} = \dfrac{x}{\lambda d_i}, \tilde{y} = \dfrac{y}{\lambda d_i}$

可得到
$$h(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) = K\lambda^2 d_i^2 \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) \times \exp\left\{-i2\pi\left[\left(x_i - \tilde{x}_0\right)\tilde{x} + \left(y_i - \tilde{y}_0\right)\tilde{y}\right]\right\} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

如果孔径大小(光瞳)相对于 λd_i 足够大，则 $P(\lambda d_i \tilde{x}, \lambda d_i \tilde{y}) = 1$

$$h(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) = K\lambda^2 d_i^2 \delta(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)$$

上式表明，当可以忽略光瞳的衍射时，点脉冲通过衍射受限系统后在像面上得到仍然是点脉冲，这便是几何光学理想成像的情况。

§4.2 相干照射下衍射受限系统的成像规律

一个确定的物分布总可以很方便地分解成无数 δ 函数的线性组合，而每个δ 函数可按系统的输出关系求出其响应。然而，在像平面上将这些无数个脉冲响应合成的结果是和物面照射情况有关的。

相干叠加： 振幅叠加

非相干叠加：强度叠加

物分布 $U_0(x_0,y_0)$ 用 δ 函数表达

$$U_0(x_0,y_0)=\iint_{-\infty}^{\infty}U_0(\xi,\eta)\delta(x_0-\xi,y_0-\eta)d\xi d\eta$$

物面上每一个脉冲通过系统后都形成一个复振幅分布，所有这些分布的相干叠加，便是物通过系统后所得的像

$$U_i(x_i,y_i)=F\{U_0(x_0,y_0)\}=F\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}U_0(\xi,\eta)\delta(x_0-\xi,y_0-\eta)d\xi d\eta\right\}$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}U_0(\xi,\eta)F\{\delta(x_0-\xi,y_0-\eta)\}d\xi d\eta$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}U_0(\xi,\eta)\underline{\underline{h(x_i-M\xi,y_i-M\eta)}}d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty}U_0\left(\frac{\tilde{x}_0}{M},\frac{\tilde{y}_0}{M}\right)\underline{h(x_i-\tilde{x}_0,y_i-\tilde{y}_0)}d\tilde{x}_0d\tilde{y}_0$$

理想的成像分布

$$U_g(x_i, y_i) = \frac{1}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty} U_0\left(\frac{\tilde{x}_0}{M}, \frac{\tilde{y}_0}{M}\right) K\lambda^2 d_i^2 \delta x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0$$

$$= \frac{K\lambda^2 d_i^2}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty} U_0\left(\frac{\tilde{x}_0}{M}, \frac{\tilde{y}_0}{M}\right)\delta(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0) d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0$$

$$= \frac{K\lambda^2 d_i^2}{M^2} U_0\left(\frac{x_i}{M}, \frac{y_i}{M}\right)$$

理想像 U_g 的分布形式与物的 U_0 的分布形式是一样的。

空间坐标放大了M倍。

取 $\widetilde{h}(x_i-\widetilde{x}_0, y_i-\widetilde{y}_0)=\dfrac{1}{K\lambda^2 d_i^2}h(x_i-\widetilde{x}_0, y_i-\widetilde{y}_0)$

$$
\begin{aligned}
U_i(x_i, y_i) &= \frac{K^2\lambda^2 d_i^2}{M^2}\iint_{-\infty}^{\infty} U_0\left(\frac{\tilde{x}_0}{M}, \frac{\tilde{y}_0}{M}\right)\tilde{h}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)\,d\tilde{x}_0\,d\tilde{y}_0 \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\tilde{h}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)\,d\tilde{x}_0\,d\tilde{y}_0 \\
&= U_g(x_i, y_i)\otimes\tilde{h}(x_i, y_i)
\end{aligned}
$$

(1)通过衍射受限系统后的像分布是理想像和脉冲响应函数的卷积。

(2)衍射受限系统也是可以看成线性空不变系统。

再根据衍射受限系统的成像公式，得

$$\tilde{h}(x_i-\tilde{x}_0, y_i-\tilde{y}_0)=\iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i\tilde{x}, \lambda d_i\tilde{y})\times$$

$$\exp\{-i2\pi\left[\left(x_i-\tilde{x}_0\right)\tilde{x}+\left(y_i-\tilde{y}_0\right)\tilde{y}\right]\}d\tilde{x}d\tilde{y}$$

$$=F\left\{P(\lambda d_i\tilde{x}, \lambda d_i\tilde{y})\right\}$$

由此可见，在相干照射条件下，对于衍射受限成像系统，表征成像系统特征的脉冲响应函数仅决定于系统的光瞳函数。

结论

1. 像平面将产生以理想像点为中心的出瞳孔径的夫琅禾费衍射花样；

2. 当可以忽略光瞳的衍射时，点脉冲通过衍射受限系统后在像面上得到仍然是点脉冲，这便是几何光学理想成像的情况；

3. 衍射受限系统也是可以看成线性空不变系统；

4. 在相干照射条件下，对于衍射受限成像系统，表征成像系统特征的脉冲响应函数仅决定于系统的光瞳函数。

§ 4.3 衍射受限系统的相干传递函数

§4.3 衍射受限系统的相干传递函数

相干照射下的衍射受限系统，对复振幅的传递是线性空不变的。系统的成像特性在空域中是由点扩散函数来表征。

相干传递函数 (Coherent transfer function, CTF)：

频域中 $\tilde{h}(x_i, y_i)$ 的频谱函数 $H(\xi, \eta)$

它描述系统的成像特性，

一、相干传递函数

相干成像系统的物像关系由卷积积分描述

$$U_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)\tilde{h}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)d\tilde{x}_0 d\tilde{y}_0$$

$U_g(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$　几何光学理想的复振幅分布，

$\tilde{h}(x_i - \tilde{x}_0, y_i - \tilde{y}_0)$　系统的脉冲响应。

从空域的观点来看，卷积积分是把物点看做基元，像点是物点产生的衍射图样的相干叠加。

从频域角度来分析成像过程

定义系统的输入频谱 $G_{gc}(\xi,\eta)$

输出频谱 $G_{ic}(\xi,\eta)$

$$G_{gc}(\xi,\eta)=F\left\{U_g(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\right\}$$

$$G_{ic}(\xi,\eta)=F\left\{U_i(x_i,y_i)\right\}$$

相干传递函数CTF为 $H(\xi,\eta)=F\left\{\tilde{h}(x_i,y_i)\right\}$

在衍射受限系统中

$$\begin{aligned}H(\xi,\eta)&=F\left\{F\left\{P(\lambda d_i\tilde{x},\lambda d_i\tilde{y})\right\}\right\}\\&=P(-\lambda d_i\xi,-\lambda d_i\eta)\end{aligned}$$

相干传递函数在数值上等于系统的光瞳函数

$$H(\xi,\eta) = P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta)$$

相干传递函数与表示系统物理属性的光瞳函数相联系！

光瞳函数定义为

$$P(\lambda d_i \xi, \lambda d_i \eta) = \begin{cases} 1 & \text{在出瞳内} \\ 0 & \text{在出瞳外} \end{cases}$$

频域坐标 (ξ, η) 与其空域坐标 (x, y) 之间的关系为

$$x = \lambda d_i \xi, \quad y = \lambda d_i \eta$$

空间频率的取值也是有限的，其极大值定义为系统的截止频率（Cut-off frequency)，记为 ρ_c

有

$$\rho_{cx} = \frac{x_{\max}}{\lambda d_i}, \quad \rho_{cy} = \frac{y_{\max}}{\lambda d_i}$$

式中 $x_{\max}$ 和 $y_{\max}$ 分别是出瞳沿 x 轴和 y 轴的线度。

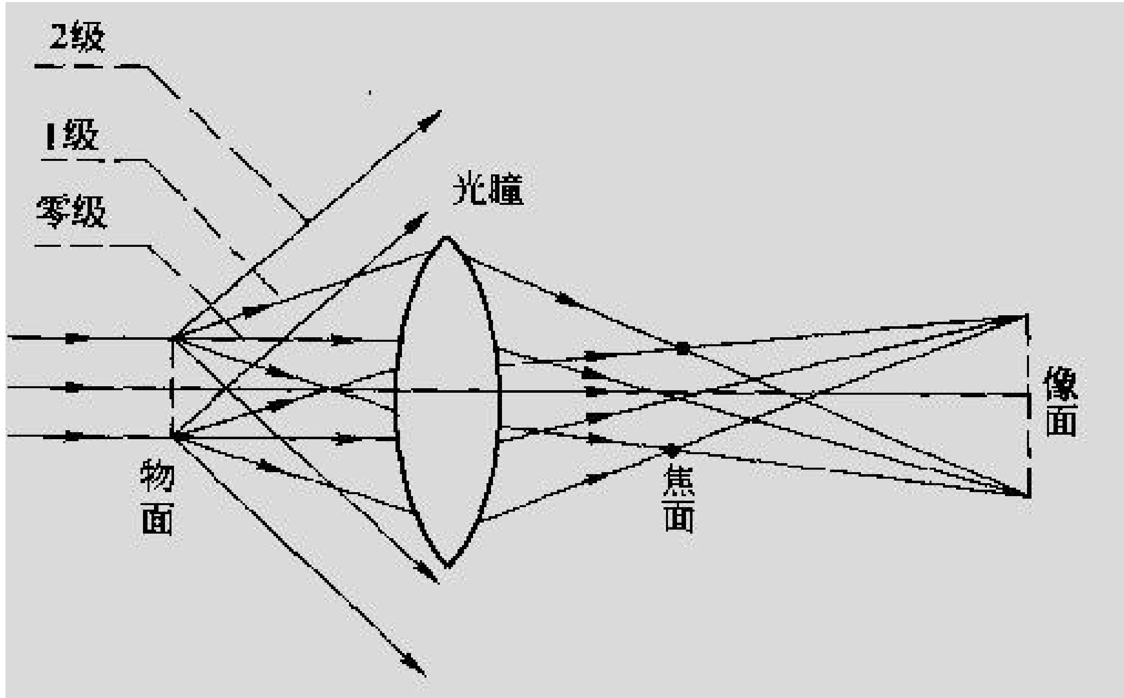
相干传递函数

$$H(\xi,\eta)=\begin{cases}1 & \textit{在出瞳内} \\ 0 & \textit{在出瞳外}\end{cases}$$

假如不考虑孔径有有限大小，认为恒有 $P=1$

则整个频谱面上都有 $H(\xi,\eta)=1$

这时像是物的准确复现，没有任何信息丢失。这正是几何光学理想成像情况。



衍射受限相干成像系统对输入的各种频率成分的作用，相当于一个低通滤波器。由此可见，截止频率是检验光学成像系统质量优劣的重要参数之一。

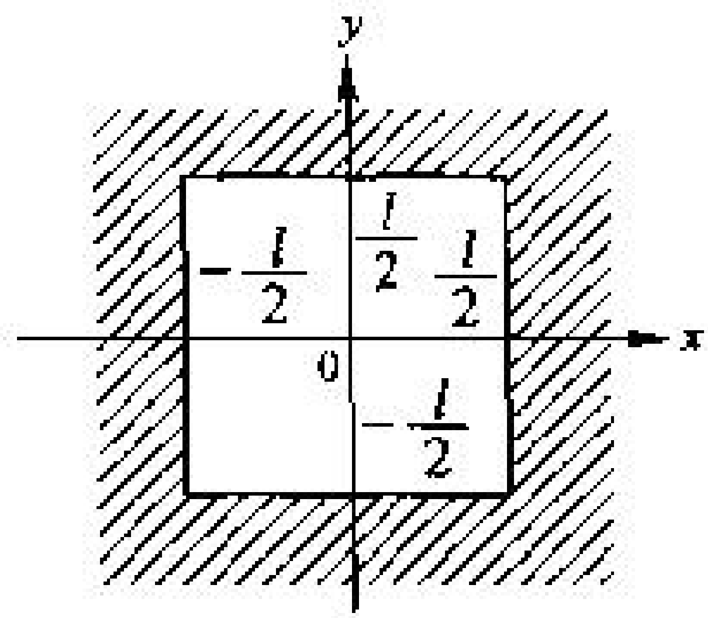
具体系统的相干传递函数 $H(\xi,\eta)$ 表示

须先求出光瞳函数 $P(x,y)$

再把其中的 x,y 用 $\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta$ 替换

当系统的像差一定时，相干传递函数直接由光瞳函数的形状、大小和位置确定。

例4.3.1 有一出射光瞳为正方开的衍限受限系统，正方形的边长为 l ，试计算该系统的相干传递函数。



(a) 正方形出瞳

解： 该系统出瞳的透射率函数 $P(x,y)$ 可以用一个二维矩形函数来描述

$$P(x,y)=rect\left(\frac{x}{l}\right)rect\left(\frac{y}{l}\right)=\begin{cases}1 & \frac{|x|}{l},\frac{|y|}{l}\le\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

系统的相干传递函数是

$$H(\xi,\eta)=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)$$

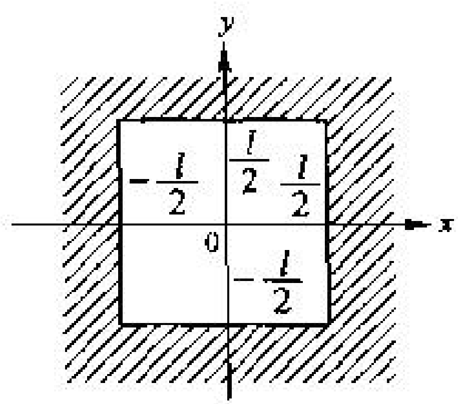
$$=rect\left(\frac{\lambda d_i\xi}{l}\right)rect\left(\frac{\lambda d_i\eta}{l}\right)=\begin{cases}1 & |\xi|,|\eta|\le\frac{l}{2\lambda d_i}\\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

其函数图形如图所示。显然，x 轴和 y 轴方向的

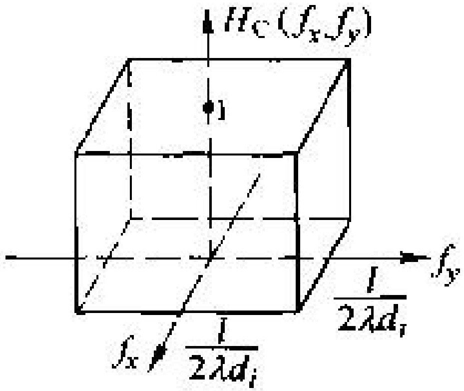
空间截止频率分别为 $\rho_{cx}=\dfrac{l}{2\lambda d_i}$， $\rho_{cy}=\dfrac{l}{2\lambda d_i}$

而系统的最大截止频率与 x 轴成45度角的方向上，为：

$$\rho_{c\max}=\frac{\sqrt{2}l}{2\lambda d_i}$$

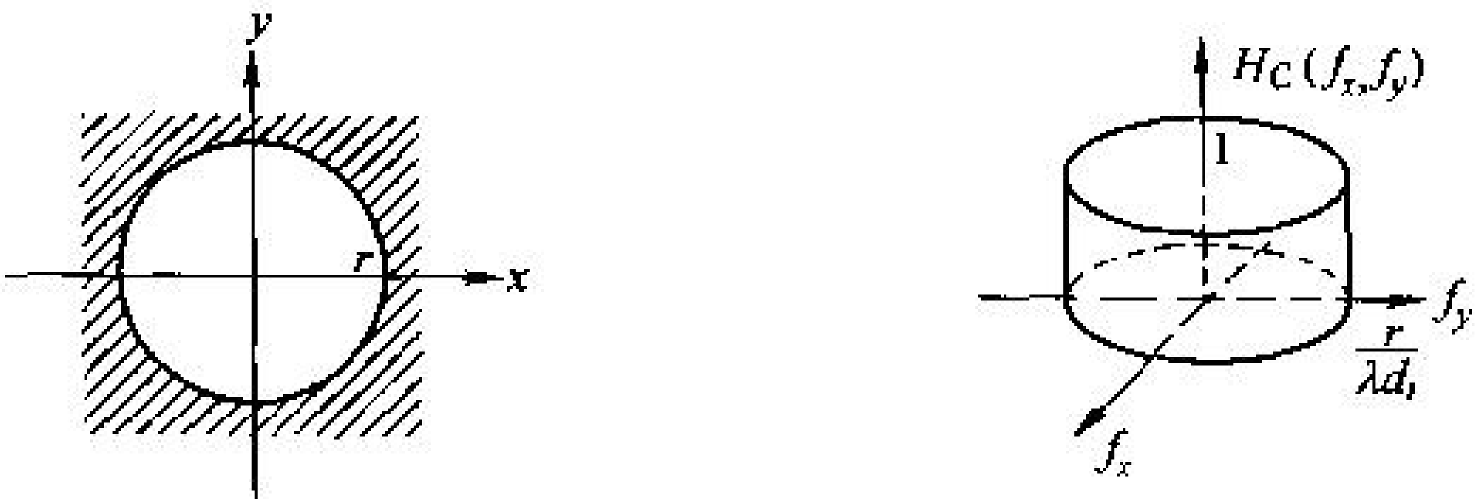


(a) 正方形出瞳



(b) 相干传递函数

例4.3.2 设衍限受限系统的出射光为一圆，其直径为 $D = 2r$，试计算该系统的相干传递函数。



(a) 圆形出瞳　　(b) 相干传递函数

解: 该系统出瞳的透射率函数可以用一个圆域函数来描述

$$P(x,y)=circ\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{D/2}\right)=\begin{cases}1 & x^2+y^2\le r^2=\left(\frac{D}{2}\right)^2\\ 0 & others\end{cases}$$

系统的相干传递函数是

$$H(\xi,\eta)=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)=circ\left(\frac{\lambda d_i\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{D/2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{D/(2\lambda d_i)}\right)=\begin{cases}1 & \sqrt{\xi^2+\eta^2}\le\frac{D}{2\lambda d_i}\\ 0 & others\end{cases}$$

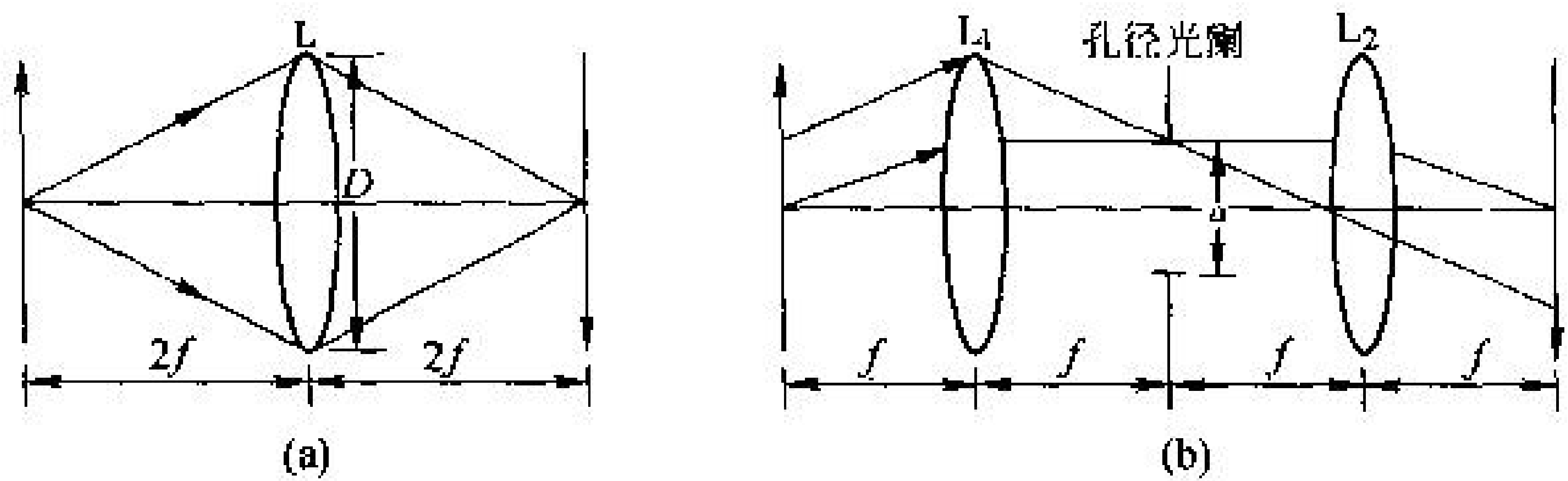
根据出瞳的圆对称性，该系统在一切方向的空间截止频率分别为

$$\rho_c = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{D}{2\lambda d_i}$$

如，当 $D = 1\,cm$, $d_i = 10\,cm$, $\lambda = 632.8\,nm$,

用上式可以算得空间截止频率为 $\rho_c = 79 \times 10^{-3}\ m^{-1}$

例4.3.3 两个相干成像系统，各透镜的焦距为 f，(a)中单透镜的光阑直径为 D 为使图(b) 双透镜系统获得与图(a) 相同的截止频率，孔径光阑直径， a 应等于多大?



解： 设物距为 d_0，像距为 d_i，放大率为 M

为使成实像时 M 为正，将像面坐标相对于物面坐标反演，使倒像的影响不反映在 M 上。于是 M 可表示成：

$$M = \frac{d_i}{d_0} = \frac{d_i - f}{f}$$

即

$$d_i = (1 + M) f$$

此系统的光瞳函数是直径为 D 的圆形孔径，

其截止频率与物空间截止频率 ρ_{0c} 的关系为

$$\rho_c = \frac{D}{2\lambda d_i} = \frac{1}{M}\rho_{0c}$$

即
$$\rho_{0c} = \frac{D}{2\lambda d_0} = \frac{MD}{2\lambda d_i} = \frac{MD}{2\lambda(1+M)f}$$

求得当 ρ_{0c} 取最大值时的放大倍数 M

将 ρ_{0c} 对 M 求导出并令其为零得

$$\frac{d\rho_{oc}}{dM}=\frac{D}{2\lambda f}\frac{1}{(1+M)^2}=0$$

因此，只有当放大倍数 M 为无穷大时，系统才有最大的空间截止频率，此截止频率为：

$$\rho_{0c\max}=\lim_{M\to\infty}\frac{D}{2\lambda f}\frac{M}{1+M}=\frac{D}{2\lambda f}$$

此时，物置于透镜前焦面，像在像方无穷远。

物空间的通频带为 $$-\frac{D}{2\lambda f}<\rho<\frac{D}{2\lambda f}$$

这样，对单透镜系统，其截止频率为 $$\rho_c=\frac{D}{4\lambda f}$$

为保证图(b)物面上每一面元发出的低于某一空间频率的平面波，都毫无阻挡地通过光成像系统，则相应的截止频率为

$$\rho'_c = \frac{a/2}{\lambda f} = \frac{a}{2\lambda f}$$

当 $\rho_c = \rho'_c$ 时，可以得到

$$a = \frac{D}{2}$$

二、相干线扩散函数和边缘扩散函数

测量传递函数的方法：

(一)是计算或测量出系统的点扩散函数，然后对它做傅里叶变换以求得传递函数。

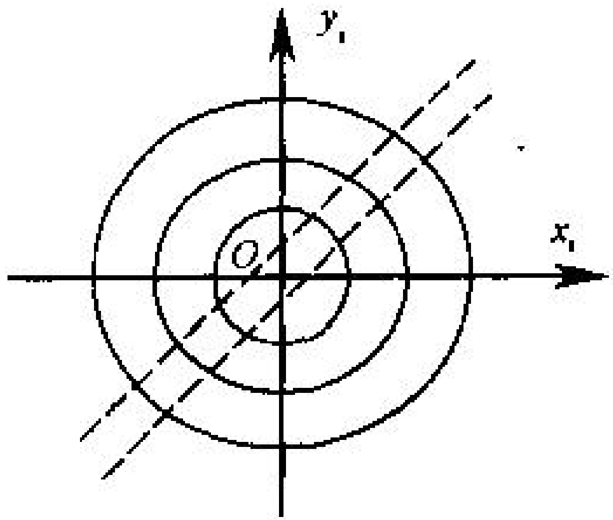
(二)是把大量频率不同的本征函数逐入输入系统，并确定每个本征函数所受到的衰减及其相移，从而得到传递函数 。

(三)实用的方法是由线扩散函数确定传递函数。

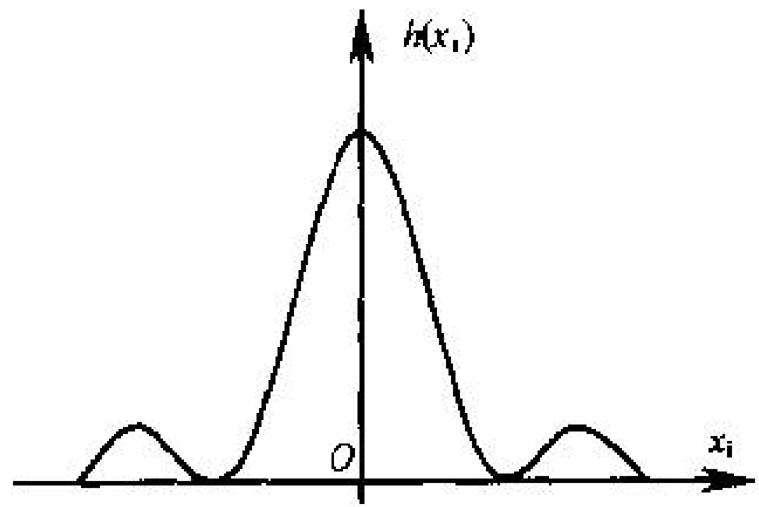
1. 线扩散函数与边缘函数的概念

以点物的强度响应为例讨论点扩散函数与线扩散函数的关系！

一个物点在像面上造成的强度分布：



(a)

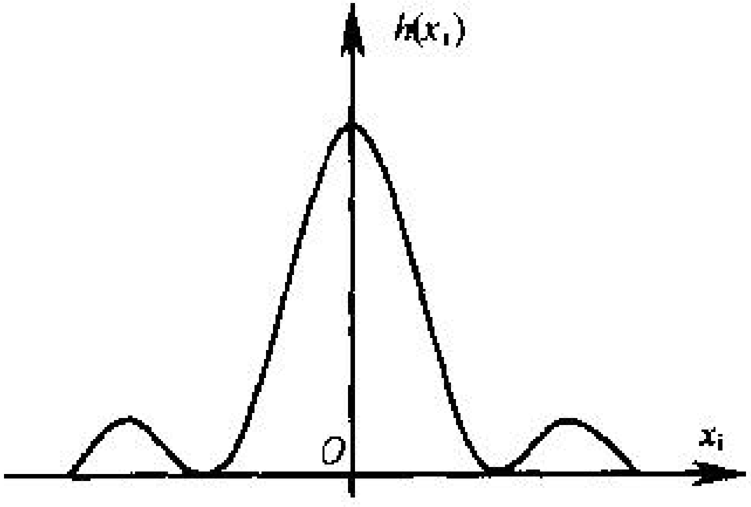


(b)

狭缝通过光学系统后的光强分布

线扩散函数：
直线像的光强分布在 x 方向的函数。

y方向为均匀分布！



图示代表亮直线的成像情况，这就是实际成像的强度分布，也就是线扩散函数。点扩散函数的曲线形状和线扩散函数的曲线形状是不一样的。线扩散函数由点扩散函数叠加而所。

设平行于 y_0 轴的线脉冲（线光源） $U_0(x_0,y_0)=\delta(x_0)$

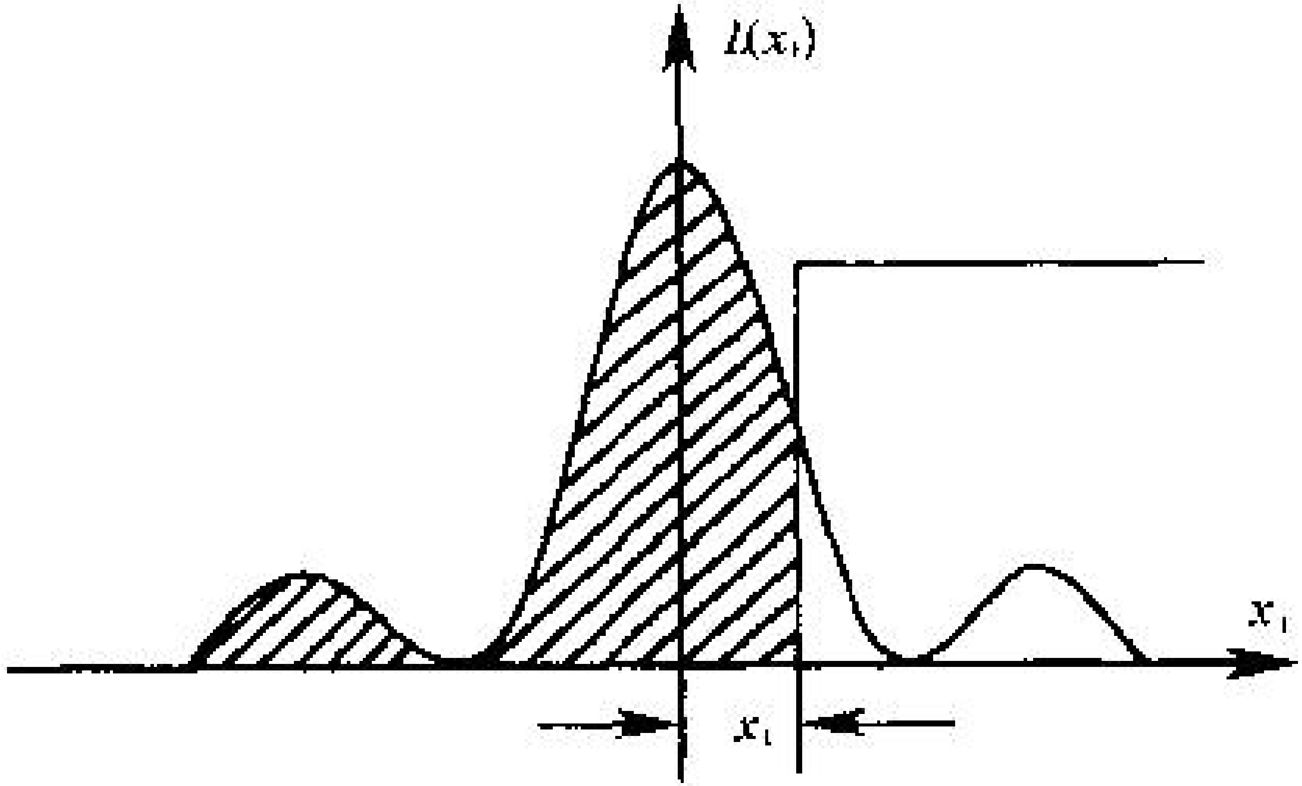
线性空不变系统的线扩散函数为：

$$
\begin{aligned}
L(x_i) &= \delta(x_i) * h(x_i, y_i) \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) h(x_i-\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(x_i, \eta) d\eta
\end{aligned}
$$

上式表明，线扩散函数仅依赖于 x_i ，其值等于点扩散函数沿 y_i 方向的线积分。

线扩散函数：如果物为一狭缝，实际上在像面上形成的分布就是线扩散函数。

边缘函数：我们可以用一个与狭缝方向平行的刀片放置在像面上。开始时，刀片完全挡住狭缝像，刀片逐渐移动，也就逐渐放入狭缝像的光。在刀片的整个移动过程中，进入探测器的光通量随刀口位置$\boldsymbol{x}_i$的变化，得到一个函数$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_i)$ ，这个函数称为**边缘函数**。



$I(x_1)$
x_1
x_1

边缘扩散函数 $E(x_i)$ 来源于线扩散函数 $L(x_i)$

$$E(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} L(\xi) d\xi$$

对上式微分，可得 $$\frac{dE(x_i)}{dx_i} = L(x_i)$$

边缘扩散函数也可用下面方式导出

$$
\begin{aligned}
E(x_i) &= \mathrm{step}(x_i) * h(x_i, y_i) \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi,\eta)\mathrm{step}(x_i-\xi)\,d\xi\, d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi,\eta)\,d\eta\right]\mathrm{step}(x_i-\xi)\,d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} L(\xi)\mathrm{step}(x_i-\xi)\,d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{x_i} L(\xi)\,d\omega
\end{aligned}
$$

2. 相干线性扩散函数和边缘扩散函数

相干线扩散函数：在相干照射下的狭缝在像面上产生的复振幅。

相干线扩散函数的一维傅里叶变换等于系统的传递函数沿 ξ 方向的截面分布，则

$$F\left\{L(x_i)\right\} = F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(x_i,\eta)d\eta\right\} = H(\xi,0)$$

改变相干照射的狭缝方向，分别对每一个方向测量线扩散函数，然后做一维傅里叶变换，就可确定相应各个方向的传递函数截面。点扩散为圆对称时，传递函数也是圆对称的，因而只需要一个截面就可能完全确定。如果点扩散函数是对

x_i, y_i 可分离变量的，那么传递函数也是可以分离变量的，

因而只需要两个截面 $H(\xi,0)$ 和 $H(0,\eta)$ 就可以确定。

一个平行于 y_0 轴的狭缝在像面上产生的相干线扩散函数为

$$L(x_i) = F^{-1}\left\{H(\xi,0)\right\}$$

在衍射受限系统中的相干传递函数在通频带内为常数，无论孔径形状如何，相干传递函数的截面总是矩形函数，因而 $L(x_i)$ 呈sinc函数变化。对于衍射受限系统，$L(x_i)$ 可表示为：

$$L(x_i) = F^{-1}\left\{P(\lambda d_i \xi,0)\right\}$$

如：直径为 D 的圆形光瞳，垂直于孔径的任意截面，都矩形函数，其光瞳函数为：

$$P(\lambda d_i \xi, 0) = \mathrm{rect}\left(\frac{\lambda d_i \xi}{D}\right)$$

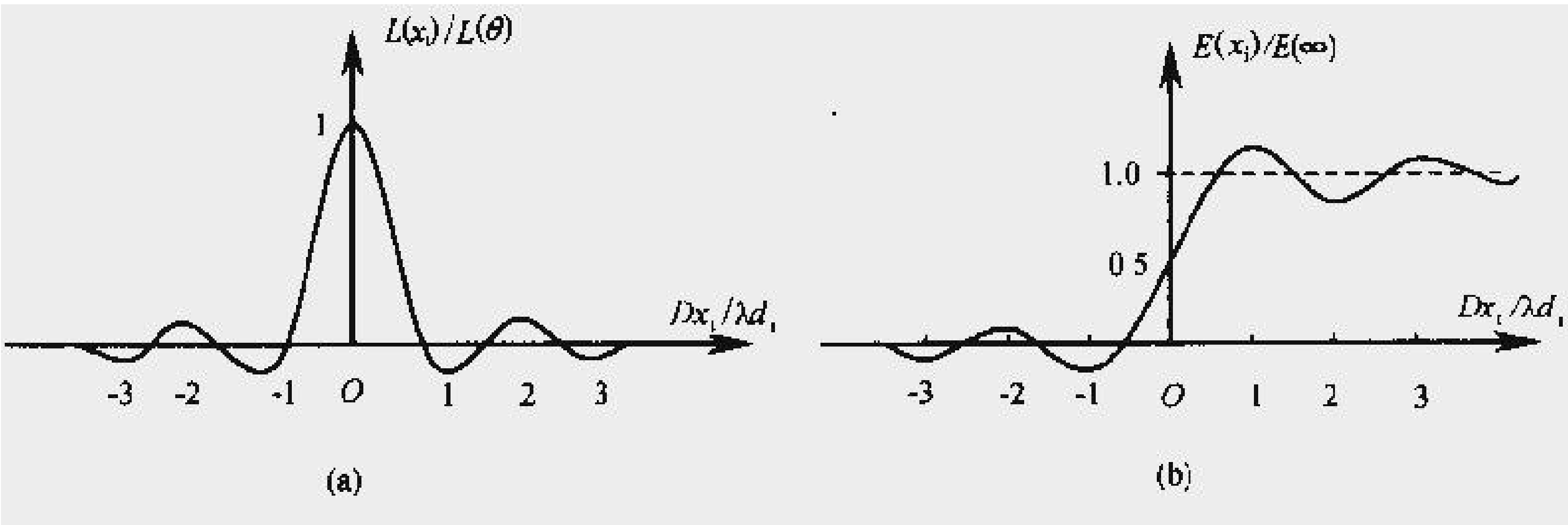
线扩散函数为

$$L(x_i) = F^{-1}\left\{rect\left(\frac{\lambda d_i \xi}{D}\right)\right\} = \frac{D}{\lambda d_i}\sin c\left(\frac{D x_i}{\lambda d_i}\right)$$

物面上放置一个刀口或直边，相干光均匀照射，像面上得到的相干边缘扩散函数

$$E(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{D}{\lambda d_i} \sin c\left(\frac{D}{\lambda d_i}\xi\right) d\xi$$

$$E(x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi D x_i}{\lambda d_i} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi D x_i}{\lambda d_i}\right)^2 + \frac{1}{600}\left(\frac{\pi D x_i}{\lambda d_i}\right)^3 - \cdots\right]$$



相干线扩散函数　　　　边缘扩散函数

§4.4　衍射受限非相干成像系统的传递函数

§ 4.4 衍射受限非相干成像系统的传递函数

在非相干照射下，物面上各点的振幅和相位随时间变化的方式是彼此独立、统计无关的。

相干照射：物点通过系统得到一个对应的复振幅分布，对这些**复振幅分布的相干叠加**得到像。

非相干照射：先由复振幅分别求出对应的强度分布，然后将这些**强度分布叠加**（非相干叠加）得到像面强度分布。

非相干成像系统是强度的线性系统，若成像是空不变的，则非相干成像系统是强度的线性空不变系统。

一、非相干系成像系统的光学传递函数 (OTF)

准单色光(Quasi-monochromatic light)

照射光波的时间频带宽度为 $\Delta\nu$ ，其中心频率为 ν

并且满足条件 $$\frac{\Delta\nu}{\nu} << 1$$

设物平面上光扰动的分布函数为 $f(x_0, y_0; t)$

$f(x_0, y_0; t)$ 关于变量 t 的傅里叶变换

$$F(x_0, y_0; \nu) = F\left\{f(x_0, y_0; t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0; t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

其中 $F(x_0, y_0; \nu)$ 是时间频率为 ν 的单色光波在物平面上的复振幅分布函数。

像平面上的响应 $G(x_i, y_i; \nu)$

$$G(x_i, y_i; \nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(x_0, y_0; \nu) h(x_i - x_0, y_i - y_0) dx_0 dy_0$$

$G(x_i, y_i; \nu)$ 又可看成是实际输出像 $g(x_i, y_i; t)$ 的频谱函数

$$\begin{aligned} g(x_i, y_i; t) &= F^{-1}\{G(x_i, y_i; \nu)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x_i, y_i; t) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} F(x_0, y_0; \nu) h(x_i - x_0, y_i - y_0; \nu) dx_0 dy_0 \right] e^{i2\pi\nu t} d\nu \end{aligned}$$

假设系统光源为准单色光, 其用中心频率为 ν_0，

$F(x_0, y_0;\nu)$ 只有在 $\nu = \nu_0$ 的窄带范围内不为零，在此

范围外可视为零。

$$g(x_i, y_i;t) = \iint_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(x_0, y_0;\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu\right]h(x_i - x_0, y_i - y_0;\nu_0)dx_0 dy_0$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0;t)h(x_i - x_0, y_i - y_0;\nu_0)dx_0 dy_0$$

由于光接收器(如肉眼、照相乳胶和光电探测器)都只能感知光的强度，且其响应频率远小于光波频率，故光接收器所感知到的像平面上的光强度为：

$$I(x_i, y_i) = \left\langle g(x_i, y_i; t) g^*(x_i, y_i; t) \right\rangle$$

$$I(x_i, y_i) = \left\langle \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0; t) h(x_i - x_0, y_i - y_0; \nu_0) dx_0 dy_0 \right.$$

$$\left. \times \iint_{-\infty}^{\infty} f^*(x, y; t) h^*(x_i - x, y_i - y; \nu_0) dx dy \right\rangle$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\langle \underline{f(x_0, y_0; t) f^*(x, y; t)} \right\rangle h(x_i - x_0, y_i - y_0; \nu_0)$$

$$\times h^*(x_i - x, y_i - y; \nu_0) dx_0 dy_0 dx dy$$

准单色光照射时，物平面上的复振幅分布函数中，幅值随时间作缓慢变化，而相位部分随时间迅速变化。

物面上的任意两点 (x_0, y_0) 和 (x, y) 处的光振动写为：

$$f(x_0, y_0; t) = f(x_0, y_0)e^{i\phi(x_0, y_0; t)}$$

$$f(x, y; t) = f(x, y)e^{i\phi(x, y; t)}$$

代入关联得

$$\left\langle f(x_0, y_0; t) f^*(x, y; t) \right\rangle = f(x_0, y_0) f^*(x, y) \left\langle e^{i[\phi(x_0, y_0; t) - \phi(x, y; t)]} \right\rangle$$

下面只讨论两类典型的照射，即相干照射和非相干照射。

1. 相干照射(Coherent illumination)

在相干光源照射下，物平面上任意两点光振动之间的相位差随时间的变化是恒定的，这种照射方式称为空间相干照射。

$$\boxed{\left\langle f(x_0,y_0;t)f^*(x,y;t)\right\rangle = f(x_0,y_0)f^*(x,y)}$$

$$I(x_i,y_i)=\left\langle \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0,y_0;t)h(x_i-x_0,y_i-y_0;\nu_0)dx_0dy_0 \right.$$

$$\left. \times\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y;t)h(x_i-x,y_i-y;\nu_0)dxdy \right\rangle$$

$$=\left|f(x_i,y_i)\otimes h(x_i,y_i)\right|=\left|g(x_i,y_i)\right|^2$$

衍射受限光学成像系统对光场复振幅变换而言是线性空不变系统；对于光强度的变换，则不是线性系统。

2. 非相干照射(incoherent illumination)

在非相干光源照射下，物平面上各点的光振动随时间的变化都是统计无关的。

$f(x_0, y_0; t) f^*(x, y; t)$ 仅在点 (x_0, y_0) 处的值不为零。

光场关联

$$\left\langle f(x_0, y_0; t) f^*(x, y; t) \right\rangle = f(x_0, y_0) f^*(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0)$$

得非相干照射像面上的光强分布

$$
\begin{aligned}
I(x_i, y_i) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) h(x_i - x_0, y_i - y_0; \nu_0) \\
&\quad \times h^*(x_i - x, y_i - y; \nu_0) \delta(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 dx dy \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} \left| f(x_0, y_0) \right|^2 \left| h(x_i - x_0, y_i - y_0; \nu_0) \right|^2 dx_0 dy_0 \\
&= I_0(x_i, y_i) * h_I(x_i, y_i)
\end{aligned}
$$

式中，$I_0(x_0, y_0) = \left| f(x_0, y_0) \right|^2$ 是物平面上的强度分布；

$I_I(x_i, y_i) = \left| h(x_i, y_i) \right|^2$ 称为系统的强度点扩散函数。

在非相干照射方式下，衍射受限光学系统成像对光强度的变换是线性空不变的，而对复振幅的变换则不是线性的。

在频域中，非相干照射下的物像关系为：

$$G_i(\xi,\eta) = G_g(\xi,\eta) H_I(\xi,\eta)$$

式中：

$$G_i(\xi,\eta) = F\{I_i(x_i,y_i)\}$$

$$G_g(\xi,\eta) = F\{I_g(x_i,y_i)\}$$

$$H_i(\xi,\eta) = F\{h_I(x_i,y_i)\}$$

式中，$G_i(\xi,\eta)$ 、 $G_g(\xi,\eta)$ 和 $H_I(\xi,\eta)$ 分别表示像强度、物强度和强度脉冲响应函数的频谱函数。

由于光强度总是非负的实函数，因而必有一个常数分量即零频分量，而且它的幅值大于任何非零分量的幅值，即：

$$G(0,0) \geq \left|G_i(\xi,\eta)\right|$$

$$G_g(0,0) \geq \left|G_g(\xi,\eta)\right|$$

$$H_I(0,0) \geq \left|H_I(\xi,\eta)\right|$$

人眼或光探测器对图像的视觉效果，在很大程序上取决于像所携带的信息与直流背景的相对比值，即像的清晰与否，主要的不是包含零频分量在内的总光强有多大，而在于携带有信息那部分光强相对于零频分量的比值有多大。

用零频对$G_i(\xi,\eta)$、$G_g(\xi,\eta)$ 和 $H_I(\xi,\eta)$ 进行归一化

$$G_i'(\xi,\eta)=\frac{G_i(\xi,\eta)}{G_i(0,0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}I_i(x_i,y_i)e^{-i2\pi(\xi x_i+\eta y_i)}dx_idy_i}{\iint_{-\infty}^{\infty}I_i(x_i,y_i)dx_idy_i}$$

$$G_g'(\xi,\eta)=\frac{G_g(\xi,\eta)}{G_g(0,0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}I_g(x_i,y_i)e^{-i2\pi(\xi x_i+\eta y_i)}dx_idy_i}{\iint_{-\infty}^{\infty}I_g(x_i,y_i)dx_idy_i}$$

$$H_I'(\xi,\eta)=\frac{H_I(\xi,\eta)}{H_I(0,0)}=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}h_I(x_i,y_i)e^{-i2\pi(\xi x_i+\eta y_i)}dx_idy_i}{\iint_{-\infty}^{\infty}h_I(x_i,y_i)dx_idy_i}$$

由于 $G_i(\xi,\eta)=G_g(\xi,\eta)H_I(\xi,\eta)$，$G_i(0,0)=G_g(0,0)H_I(0,0)$

归一化频谱满足 $\boxed{G_i'(\xi,\eta)=G_g'(\xi,\eta)H_I'(\xi,\eta)}$

$H_I'(\xi,\eta)$ **为非相干成像系统的光学传递函数(OTF)。**

OTF的模 $\left|H_I'(\xi,\eta)\right|$ 称为调制传递函数(Modulation transfer function, MTF)，描述了系统对各频率分量对比度的传递特性。

OTF幅角称为相位传递函数(Phase transfer function, PTF)，描述了系统对各频率分量施加的相移。

由于 $G_i'(\xi,\eta)$ $G_g'(\xi,\eta)$ 和 $H_I'(\xi,\eta)$ 一般都是复函数，都可以用它的模和幅角表示，于是有：

$$G_i'(\xi,\eta)=\left|G_i'(\xi,\eta)\right|e^{i\varphi_i(\xi,\eta)}$$

$$G_g'(\xi,\eta)=\left|G_g'(\xi,\eta)\right|e^{i\varphi_g(\xi,\eta)}$$

$$H_I'(\xi,\eta)=\left|H_I'(\xi,\eta)\right|e^{i\varphi_I(\xi,\eta)}=M(\xi,\eta)e^{i\varphi(\xi,\eta)}$$

由于 $I_i(x_i,y_i)$ ，$h_g(x_i,y_i)$ 和 $h_I(x_i,y_i)$ 都是非负实函数，它们的归一化频谱 $G'_i(\xi,\eta)$ 、$G'_g(\xi,\eta)$ 和 $H'_I(\xi,\eta)$ 都是厄米函数。

如：一个余弦输入的光强为

$$\tilde{I}_g(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)=a+b\cos[2\pi(\xi_0\tilde{x}_0+\eta_0\tilde{y}_0)+\varphi_g(\xi,\eta)]$$

则其频谱 $G_g(\xi,\eta)$ 为

$$G_g(\xi,\eta)=F\left\{\tilde{I}_g(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)\right\}$$

$$=a\delta(\xi,\eta)+\frac{b}{2}\Big\{\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)e^{i\varphi_g(\xi_0,\eta_0)}$$

$$+\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)e^{-i\varphi_g(\xi_0,\eta_0)}\Big\}$$

由于 $I_i(x_i,y_i)=I_g(x_i,y_i)*h_I(x_i,y_i)$

所以 $F\{I_i(x_i,y_i)\}=F\{I_g(x_i,y_i)\}F\{h_I(x_i,y_i)\}$

根据 $H'_I(\xi,\eta)$ 的定义，

$$F\{h_I(x_i,y_i)\}=H_I(\xi,\eta)=H_I(0,0)H'_I(\xi,\eta)$$

$$\begin{aligned}F\{I_i(x_i,y_i)\}=&H_I(0,0)a\delta(\xi,\eta)H'_I(\xi,\eta)\\&+\frac{1}{2}H_I(0,0)bH'_I(\xi,\eta)\times\delta(\xi-\xi_0,\eta-\eta_0)e^{i\varphi_g(\xi_0,\eta_0)}\\&+\frac{1}{2}H_I(0,0)bH'_I(\xi,\eta)\times\delta(\xi+\xi_0,\eta+\eta_0)e^{-i\varphi_g(\xi_0,\eta_0)}\end{aligned}$$

取其逆变换得到 I_i 时可将其略去不写，即

$$I_i(x_i, y_i) = aH'_I(0,0) + \frac{b}{2}H'_I(\xi_0, \eta_0)e^{i\varphi_g(\xi_0,\eta_0)}e^{i2\pi(\xi_0 x_i + \eta_0 y_i)} + \frac{b}{2}H'_I(-\xi_0, -\eta_0)e^{-i\varphi_g(\xi_0,\eta_0)}e^{-i2\pi(\xi_0 x_i + \eta_0 y_i)}$$

$H'_I(0,0) = 1$ 由于有

$$H'_I(\xi_0, \eta_0) = M(\xi_0, \eta_0)e^{i\varphi(\xi_0,\eta_0)}$$

$$H'_I(-\xi_0, -\eta_0) = M(-\xi_0, -\eta_0)e^{i\varphi(-\xi_0,-\eta_0)} = M(\xi_0, \eta_0)e^{-i\varphi(\xi_0,\eta_0)}$$

最后一步利用了 $H'_I(\xi, \eta)$ 的厄米性。

将这些结果代入像强度分布

$$I_i(x_i, y_i) = a + bM(\xi_0, \eta_0)\cos[2\pi(\xi_0 x_i + \eta_0 y_i) + \varphi_g(\xi_0, \eta_0) + \varphi(\xi_0, \eta_0)]$$

由于 (ξ_0, η_0) 是任意的，故上式可以写成一般形成：

$$I_i(x_i, y_i) = a + bM(\xi, \eta)\cos[2\pi(\xi x_i + \eta y_i) + \varphi_g(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta)]$$

弦条纹通过线性空不变成像系统后，像仍然是同频率的余弦条纹，只是振幅减小了，相位变化了。

二、OTF和CTF的关系

相干传递函数 $H(\xi,\eta)=F\{h(x,y)\}$

光学传递函数 $H'_I(\xi,\eta)\propto F\left\{\left|h(x,y)\right|^2\right\}$

由自相关定理和巴塞伐尔定理可以得到

$$H_I'(\xi,\eta)=\frac{H_I(\xi,\eta)}{H_I(0,0)}=\frac{F\left\{h_I(x_i,y_i)\right\}}{\iint_{-\infty}^{\infty}h_I(x_i,y_i)dx_idy_i}$$

$$=\frac{F\left\{\left|h(x_i,y_i)\right|^2\right\}}{\iint_{-\infty}^{\infty}\left|h(x_i,y_i)\right|^2dx_idy_i}=\frac{H(\xi,\eta)\otimes H(\xi,\eta)}{\iint_{-\infty}^{\infty}\left|H(\zeta,\iota)\right|^2d\zeta\, d\iota}$$

$$=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}H^*(\zeta,\iota)H(\xi+\zeta,\eta+\iota)d\zeta\, d\iota}{\iint_{-\infty}^{\infty}\left|H(\zeta,\iota)\right|^2d\zeta\, d\iota}$$

光学传递函数等于相干传递函数的自相关归一化函数。

三、衍射受限的OTF

对于相干照射的衍射受系统 $H(\xi,\eta)=P(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)$

而 $$H'_I(\xi,\eta)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}P(\lambda d_i\zeta,\lambda d_i\iota)P[\lambda d_i(\xi+\zeta),\lambda d_i(\eta+\iota)]d\zeta d\iota}{\iint_{-\infty}^{\infty}P(\lambda d_i\zeta,\lambda d_i\iota)d\zeta d\iota}$$

令 $x=\lambda d_i\zeta$， $y=\lambda d_i\iota$ 积分变量的替换不会影响积分结果

$$H'_I(\xi,\eta)=\frac{\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)P(x+\lambda d_i\xi,y+\lambda d_i\eta)dxdy}{\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)dydy}$$

光瞳函数只有1和0两个值，分母中的 P^2 与 P 等价。

OPF几何意义解释如下:

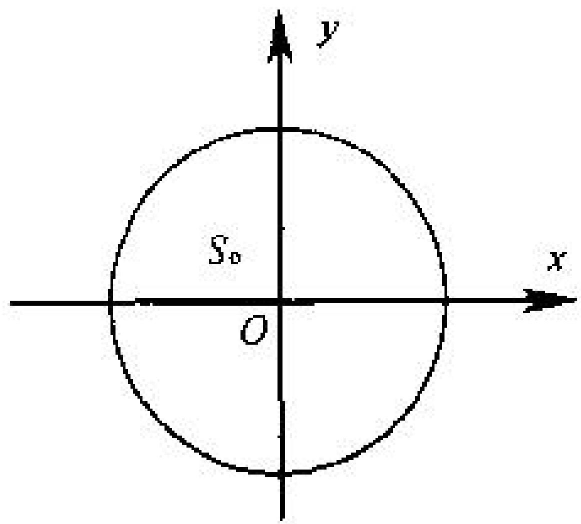
式中分母表是光瞳的总面积 S_0, 分子则中心位于$(-\lambda d_i\xi,-\lambda d_i\eta)$

的经过平称的光瞳与原光瞳的重叠面积 $S(\xi,\eta)$.

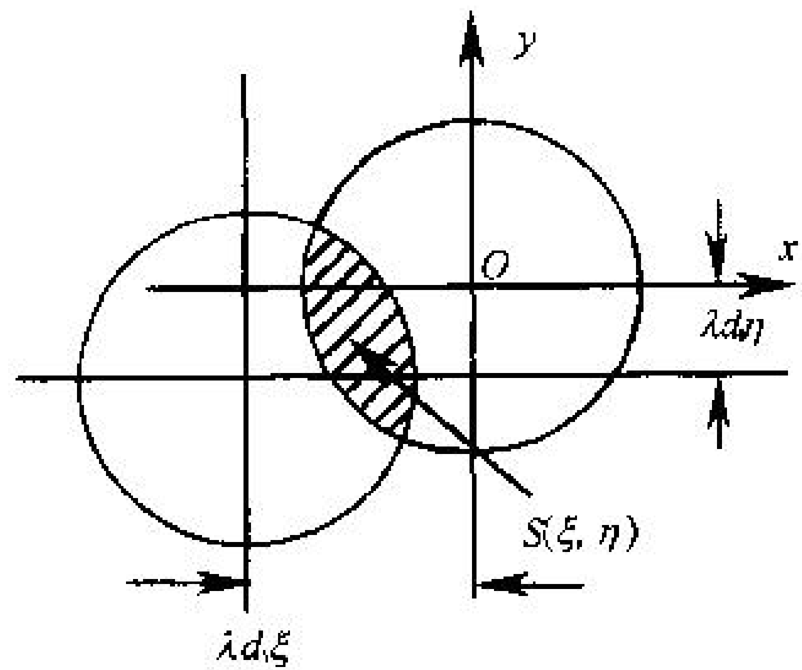
求衍射受限系统的OTF只不过是计算归一化的重叠面积，即有

$$\boxed{H'_I(\xi,\eta)=\frac{\text{出瞳重叠瞳重}}{\text{出瞳总瞳总}}=\frac{S(\xi,\eta)}{S_0}}$$

衍射受限系统OTF的几何解释图



(a)



(b)

衍射受限系统的OTF的一些性质

（1）由于$H'_I(\xi,\eta)$ 是实的非负函数，因此衍射受限的非相干成像系统只改变各频率余弦分量的对比，而不改变它们的相位。即，只需考虑MTF而不必考虑PTF。

（2）$H'_I(0,0)=1$

当 $\xi=0$，$\eta=0$ 时，两个光瞳完全重叠，归一化重叠面积为1，这正是OTF归一化的结果。

(3) $H(\xi,\eta)\le H'_I(0,0)$

从两个光瞳错开后重叠的面积小于完全重叠面积，可以看出。

(4) 截止频率 ξ_0, η_0

两出瞳从完全重合开始，分别朝相反方向平移，直至重叠面积刚好为零时，它们已经移开了 $2x_{\max}$ 和 $2y_{\max}$

于是有 $$2x_{\max} = \lambda d_i \xi \qquad 2y_{\max} = \lambda d_i \eta$$

从而求得 $$\xi_0 = \frac{2x_{\max}}{\lambda d_i} \qquad \eta_0 = \frac{2y_{\max}}{\lambda d_i}$$

与相干系统相比，非相干成像系统的截止频率是相干系统的两倍。

计算OTF的步骤总结如下：

（1） 确定系统出瞳的形状和大小，计算出瞳总面积 S_0

（2） 计算出瞳面至像平面之间的距离 d_i

（3） 任意给定一组 (ξ,η) 值，算出 $(\lambda d_i\xi,\lambda d_i\eta)$，将出瞳平移，使其中心落至 $(-\lambda d_i\xi,-\lambda d_i\eta)$ 处，计算移动前后两出瞳的重叠面积。

（4） 相继再给定一组 (ξ,η) 值，再算出重叠面积。依次类推，就可算出 $S(\xi,\eta)$ 值。

（5） 按公式(4.4.48)式计算得到 $H'_I(\xi,\eta)$

例题4.1

衍射受限非相干成像系统的光瞳为边长l的正方形，求其光学传递函数。

解： 此时的光瞳函数可表为

$$P(x,y)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{l}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y}{l}\right)$$

由图可得重叠面积

$$S(\xi,\eta)=\begin{cases}(l-\lambda d_i\xi)(l-\lambda d_i\eta) & \xi,\eta>0\\ (l+\lambda d_i\xi)(l+\lambda d_i\eta) & \xi,\eta<0\\ 0 & \lambda d_i|\xi|>l,\lambda d_i|\eta|>l\end{cases}$$

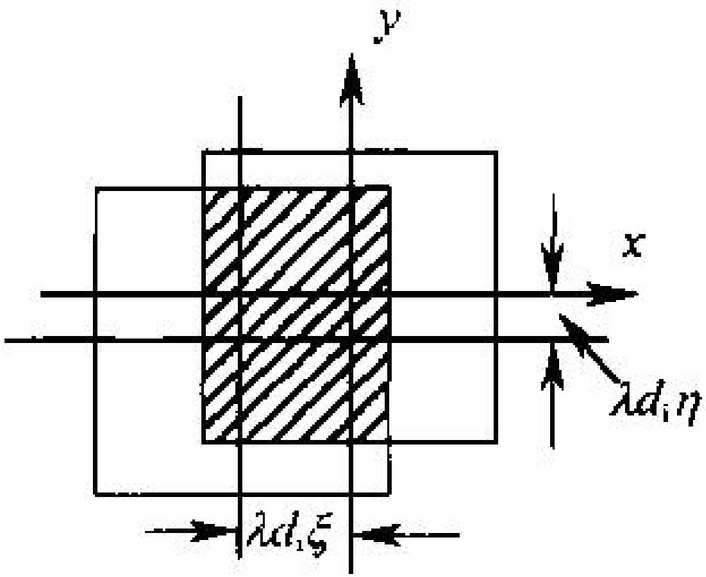
$$S(\xi,\eta)=\begin{cases}(l-\lambda d_i|\xi|)(l-\lambda d_i|\eta|) & \lambda d_i|\xi|<l, \lambda d_i|\eta|<l \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

光学传递函数为$H(\xi,\eta)=\dfrac{S(\xi,\eta)}{S_0}=\Lambda\left(\dfrac{\xi}{2\rho_c}\right)\Lambda\left(\dfrac{\eta}{2\rho_c}\right)$

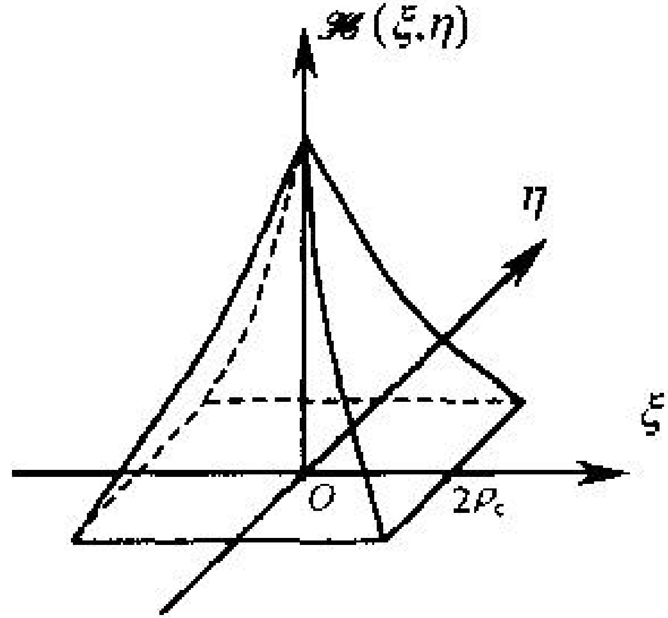
式中，$\rho_c=l/2\lambda d_i$ ，是采用相干照明时的截止频率。

非相干系统沿 ξ 和 η 轴方向上的截止频率是 $2\rho_c=l/\lambda d_i$

方形光瞳衍射受限OTF计算



(a)



(b)

例4.4.2 衍射受限系统的出瞳自径为D的圆，求此系统的光学传递函数。

解： 由于是圆形光瞳，OTF应该是圆对称的，交叠面积为

$$S(\xi,0)=\frac{D^2}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)$$

其中 $\cos\theta$ 由下式定义

$$\cos\theta=\frac{\lambda d_i\xi/2}{D/2}=\frac{\lambda d_i\xi}{D}$$

在截止频率范围内 $H' = \dfrac{S(\xi,0)}{S_0} = \dfrac{S(\xi,0)}{\pi D^2/4} = \dfrac{2}{\pi}(\theta - \sin\theta\cos\theta)$

截止频率满足： $\lambda d_i \xi = D$

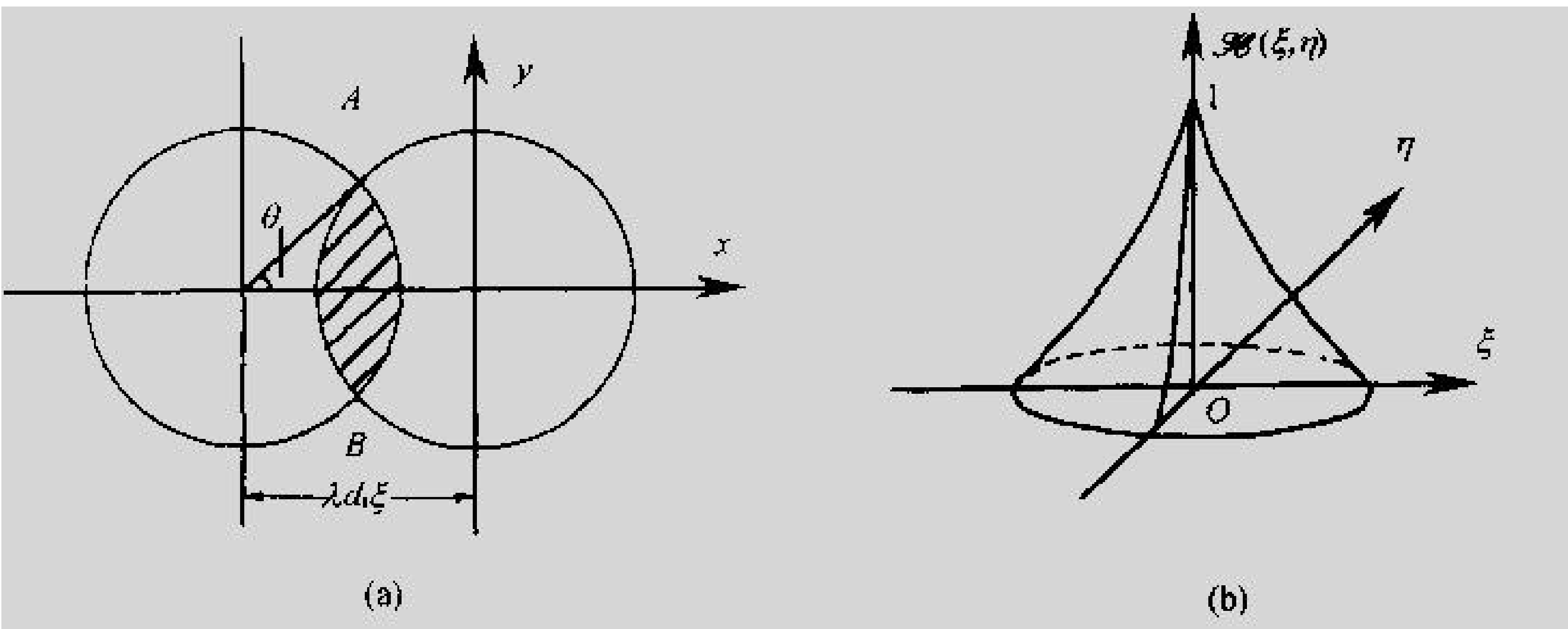
两个圆中心距离大于直径*D*时，重叠面积为零。此种系统的相干传递函数的截止频率： $\rho_c = D/2\lambda d_i \xi$

显然光学传递函数的截止频率恰好又是 $2\rho_c$

$H'(\xi,\eta)$ 在极坐标中的表达式为

$$H'(\xi,0)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta) & \rho\le D/\lambda d_i\\ 0 & 其他\end{cases}$$

式中 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $\quad \cos\theta=\dfrac{\lambda d_i\rho}{D}$



思考题

- 非相干成像系统的截止频率是相同结构的相干成像截止频率的2倍,是否说明非相干成像系统优于相干成像系统?

第五章 部分相干理论

§ 4.6 相干与非相干成像系统的比较
§ 5.1 多色光场解析信号表示
§ 5.2 互相干函数

§4.6 相干与非相干成像系统的比较

一、截止频率

非相干衍射受限系统的OTF，其截止频率是相干系统CTF的截止频率的两倍。

对于同一个光学成像系统，使用非相干照射并不一定会比采用相干照射得到更好的像。

相干系统截止频率是确定像的复振幅的最高频率分量，而非相干系统截止频率是对像的强度的最高频率分量而言主。

二、像强度频谱

要对相干照射和非相干照射下像强度地行比较，可以考察其频谱特性。

在相干和非相干照射下，像强度可分别表示为：

$$I_c(x_i, y_i) = \left| U_g(x_i, y_i) \otimes \tilde{h}(x_i, y_i) \right|^2$$

$$I_i(x_i, y_i) = I_g(x_i, y_i) \otimes h_I(x_i, y_i)$$

对上述两式进行傅里叶变换，并利用卷积定理和相关定理，得

$$G_c(\xi,\eta)=[G_{gc}(\xi,\eta)H(\xi,\eta)]\star[G_{gc}(\xi,\eta)H(\xi,\eta)]$$

$$G_i(\xi,\eta)=[G_{gc}(\xi,\eta)\star G_{gc}(\xi,\eta)][H(\xi,\eta)\star H(\xi,\eta)]$$

在两种情况下，像强度的频谱可能很不相同，但并不因此，而简单地得出结论来说明，一种照射方式比另一种照射方式更好。这是因为，成像不仅与照射方式有关，也与系统的结构和物的空间结构有关。

例 1

有一单透镜成像系统，其圆形边框的直径为7.2cm，焦距为10cm，且物和像等大。设物的透射率函数为

$$t(x)=\left|\sin(2\pi x/b)\right|$$

式中 $b=0.5\times10^{-3}$ cm。今用 $\lambda=600$ nm的单色光垂直照射该物，试解析说明在相干光和非相干光照射情况下，像面上能否出现强度起伏？

解：按题设条件可知

物周期 $T_1 = b/2$

其频率为 $\rho_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{2}{b} = 400$ 线/mm

$d_0 = d_i = 2f = 200$ mm

故 $\rho_c = \frac{D/2}{\lambda d_i} = 300$ 线/mm

$\rho_0 = \frac{D}{\lambda d_i} = 600$ 线/mm

在相干照射条件下 $\rho_c < \rho_1$

系统的截止频率小于物的基频，此时，系统只允许零频分量通过，其他频谱分量均被档住，所以物不能成像，像面呈均匀分布。

在非相干照射下 $\rho_1 < \rho_c$

系统的截止频率大于物的基频，故零频和基频均能通过系统参与成像，在像面上将有图像存在。基于这种分析，非相干成像要比相干成像好。

例2

在上例中，如果物的透射率函数为：

$$t(x)=\sin(2\pi x/b)$$

结论又如何？

解：物周期 $T_1 = b$　　频率 $\rho_1 = \dfrac{1}{b} = 200$ 线/mm

根据上例的数据　$\rho_1 < \rho_c < \rho_0$

在相干照射下，这个呈正弦分布的物函数复振幅能够不受衰减地通过此系统成像。而对于非相干照射方式，物函数的基频也小于其截止频率，故此物函数也能通过系统成像，但其幅度要随空间频率的增加受到逐渐增大的衰减，即对比度降低。由此可见，在这种物结构中，相干照射方式比非相干照射方式要好。

1. 在特殊物体结构中，相干照射方式比非相干照射方式要好。

2. 相干照射具有严重的散斑效应，且光学缺陷易在相干照射下观察到，并容易产生一些木纹状的附加干涉花纹，对成像的清晰度带来干扰。

3. 相干照射方式与非相干照射方式对锐边的响应也迥然不同。

三、两点的分辨

分辨率是评价光学系统成像质量的一个重要指标。

瑞利分辨判据：在<u>**非相干照射**</u>方式下，对两个强度相等的非相干点源，若一个点源产生的爱里斑中心恰好落在另一个点源所产生的的爱里斑的第一个极小上，则称它们是对于非相干衍射受限系统“刚刚能够分辨”的两个点源。

由圆孔的夫琅和费衍射花样公式可知，像斑的归一化强度为

$$I(r_0)=\left[\frac{2J_1\left(kdr_0/2z\right)}{kdr_0/2z}\right]^2=\left[\frac{2J_1(\pi x)}{\pi x}\right]^2, \qquad x=dr_0/\lambda z$$

第一个暗环的角半径为 $x = 1.22$

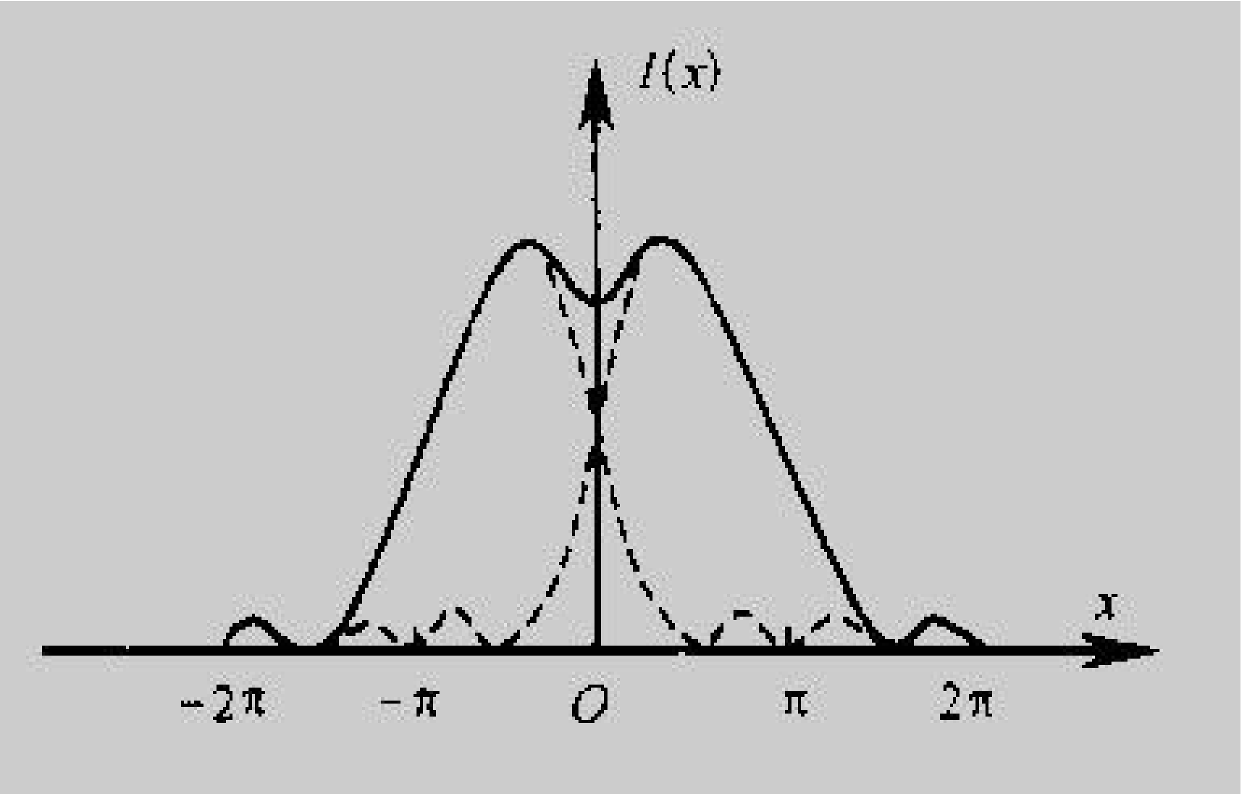
如果把两个点源像的中心沿 x 轴方向分别放在

$x = \pm 0.61$ 处

它们正好满足瑞利分辨判据的条件，且其光强分布可表示为

$$I(x) = \left\{ \frac{2J_1[\pi(x-0.61)]}{\pi(x-0.61)} \right\}^2 + \left\{ \frac{2J_1[\pi(x+0.61)]}{\pi(x+0.61)} \right\}^2$$

此时，两个点源的爱里斑图样在其中心处约下降19%。



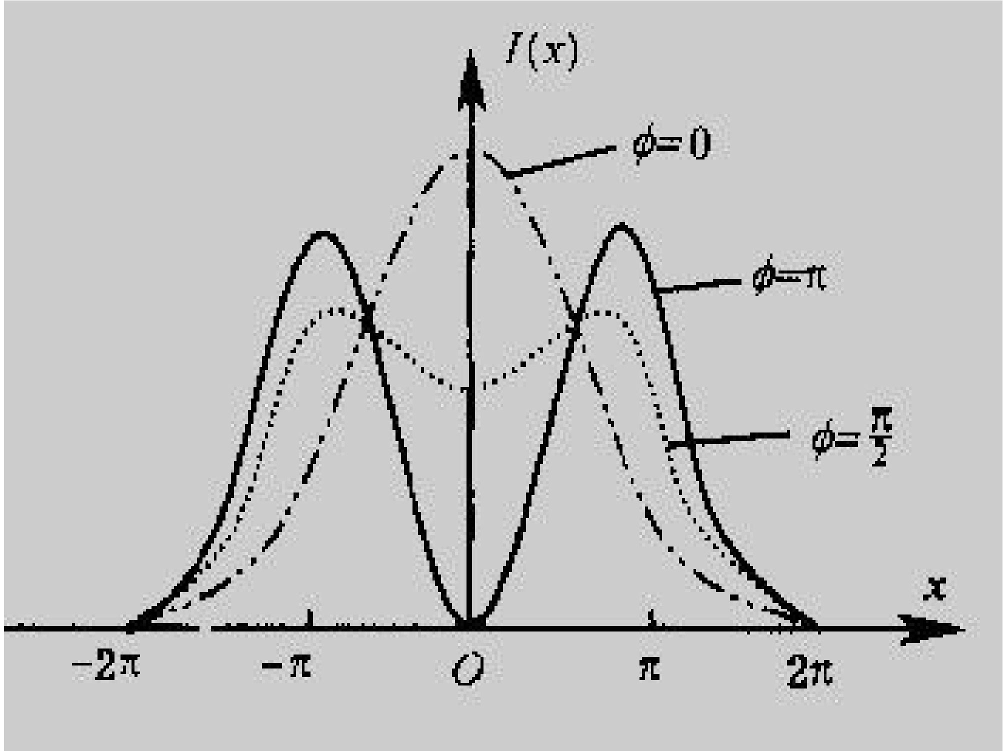
I(x)
x
-2π
-π
O
π
2π

相干照射方式

两个点源产生的爱里斑则必须按复振幅叠加后，再求其合强度：

$$I(x)=\left\{\frac{2J_1[\pi(x-0.61)]}{\pi(x-0.61)}+\frac{2J_1[\pi(x+0.61)]}{\pi(x+0.61)}e^{i\phi}\right\}^2$$

ϕ 是两物点之间的相位差



1) $\phi = 0$

两物点完全不能分辨

2) $\phi = \pi / 2$

与非相干照射所得结果完全相同

3) $\phi = \pi$

比非相干照射方式下更清楚

第五章 部分相干理论

相干性: 相干的时间效应和空间效应

光源的单色性程度　　光源的有限尺寸

部分相干性理论

处理光场统计性质的一种理论 (统计光学方法)
又涉及到光场的量子力学描述 (量子光学)

§5.1 多色光场解析信号表示

解析信号表示法：多色光场的复值表示
(不考虑辐射场的偏振效应)

在时刻 t 空间 $\vec{r}$ 的光场可以用一个实标量函数 $u^r(\vec{r},t)$ 描述。

对于线性系统，常常把 $u^r(t)$ 表示成与之相关联的一个复函数

$$u(t) = u^r(t) + iu^i(t)$$

$u(t)$ 称为 $u^r(t)$ 的解析信号(Analytic signal)。

一、单色信号的复表示

对一个单色信号，其实函数的方式可表示如下

$$u^r(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t - \phi)$$

A 是常数振幅，

ν_0 为光的频率，

ϕ 为初始相位

复表示为

$$u(t) = A\exp[-i(2\pi\nu_0 t - \phi)]$$

信号的复振幅定义为 $\tilde{A} = Ae^{-i\phi}$

二、多色信号的复表示

如果多色信号表示为 $u^r(t)$，其傅里叶变换存在如下

$$u^r(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}U^r(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu$$

式中 $U^r(\nu)$ 是 $u^r(t)$ 的傅里叶谱。

由于 $u^r(t)$ 是一个实函数，故 $U^r(\nu)$ 应是一个厄米函数

$$U^r(\nu)=[U^r(-\nu)]^*$$

上式表明 $U^r(\nu)$ 的负频率分量与正频率分量载有同样的信息，亦即仅正频率(或负频率分量)就携带了实函数的全部信息。

$$\boxed{U^r(\nu) = A(\nu)e^{i\phi(\nu)}}$$

则有 $$A(\nu) = A(-\nu)$$

$$\phi(\nu) = -\phi(-\nu)$$

即 $A(\nu)$ 是偶函数，$\phi(\nu)$ 是奇函数。

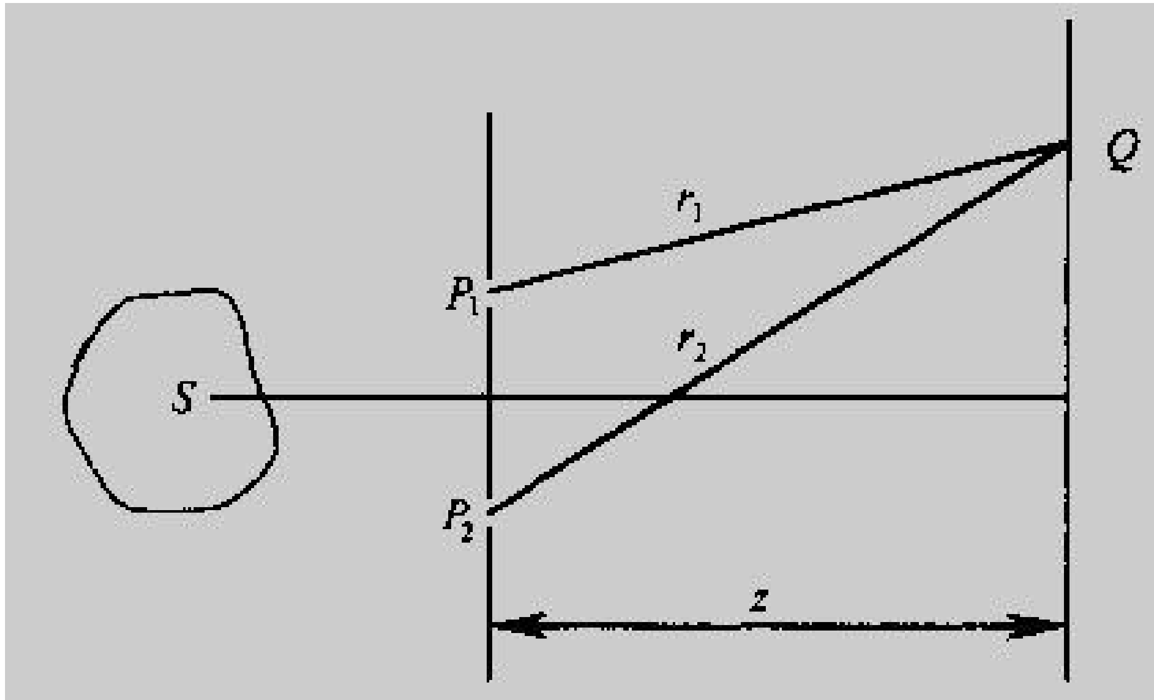
§ 5.2 互相干函数

光场作为随机过程来讨论其统计性质。

具有有限带宽和有限大小的光源发出的光场的相干性问题

确定光场中两不同点的时间相关性：把光场中的两点看作次波源，考察它们发出的两束光波在空间相遇点的干涉现象。

一、互相干函数



光场的相干性可以用相干度 (Degree of coherence) 来度量。为此，首先定义互相干函数(Mutual coherence function)。

两个光场在观察屏上 Q 点叠加后的合成光场可表示为

$$
\begin{aligned}
u(Q,t) &= u(P_1,t)+u(P_2,t) \\
&= K_1 u(P_1,t-t_1)+K_2 u(P_2,t-t_2)
\end{aligned}
$$

式中

$$t_1=\frac{r_1}{c}, t_2=\frac{r_2}{c},$$

c 是真空中的光速，

K_1 和 K_2 称为传播因子

由于探测器相对光频来说，是慢响应的，因而在 Q 探测到的光强是一个时间平均值

$$I(Q)=\left\langle u(Q,t)u^{*}(Q,t)\right\rangle$$

$$\begin{aligned}I(Q)=&K_1^2\left\langle u(P_1,t-t_1)u^{*}(P_1,t-t_1)\right\rangle\\&+K_2^2\left\langle u(P_2,t-t_2)u^{*}(P_2,t-t_2)\right\rangle\\&+K_1K_2\left\langle u(P_1,t-t_1)u^{*}(P_2,t-t_2)\right\rangle\\&+K_1K_2\left\langle u^{*}(P_1,t-t_1)u(P_2,t-t_2)\right\rangle\end{aligned}$$

如果光场是平稳的，即其统计性质不随时间改变，互相关函数只与时间差有关

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{r_2 - r_1}{c}$$

若光场还是各态经历的，则时间互相关函数等于统计互相函数

$$\left\langle u(P_1, t - t_1) u^*(P_2, t - t_2) \right\rangle = \left\langle u(P_1, t + \tau) u^*(P_2, t) \right\rangle$$
$$= \Gamma_{12}(\tau)$$

式中 $\Gamma_{12}(\tau)$ 称为光场的<u>互相干函数</u>

$$\left\langle u^*(P_1, t-t_1)u(P_2, t-t_2)\right\rangle = \left\langle u^*(P_1, t+\tau)u(P_2, t)\right\rangle = \Gamma_{12}^*(\tau)$$

当 P_1 和 P_2 点重合时，则为自相干函数，定义为

$$\left\langle u(P_1, t+\tau)u^*(P_1, t)\right\rangle = \Gamma_{11}(\tau)$$

$$\left\langle u(P_2, t+\tau)u^*(P_2, t)\right\rangle = \Gamma_{22}(\tau)$$

自相干函数只涉及一个空间点，仅仅是时间差 τ 的函数，

在不致此起混淆的情况下，忽略下标，而记为 $\Gamma(\tau)$

当 $\tau = 0$ 时，便有

$$\langle u(P_1,t)u^*(P_1,t)\rangle = \Gamma_{11}(0) = I_1$$

$$\langle u(P_2,t)u^*(P_2,t)\rangle = \Gamma_{22}(0) = I_2$$

I_1 和 I_2 分别是 P_1 和 P_2 点的光强。

单孔 P_1 和 P_2 在 Q 点产生光强为

$$I_1(Q) = K_1^2\Gamma_{11}(0) = K_1^2 I_1$$

$$I_2(Q) = K_2^2\Gamma_{22}(0) = K_2^2 I_2$$

$$\begin{aligned} I(Q) &= I_1(Q) + I_2(Q) + K_1 K_2[\Gamma_{12}(\tau) + \Gamma_{12}^*(\tau)] \\ &= I_1(Q) + I_2(Q) + 2K_1 K_2 \operatorname{Re}[\Gamma_{12}(\tau)] \end{aligned}$$

为了讨论方便，通常将互相干函数写成归一化方便

$$\gamma_{12}(\tau)=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{12}(0)}}=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

$\gamma_{12}(\tau)$ 称为光场 $u(P_1,t)$ 和 $u(P_2,t)$ 的复相干度

(Complex degree of coherence)或相关度(Correlativity)。

$$I(Q)=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\,\mathrm{Re}[\gamma_{12}(\tau)]$$

上式正是平稳光场的普遍干涉定律。

利用许瓦兹不等式易于证明

$$\left|\Gamma_{12}(\tau)\right| \le \sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}$$

$$0 \le \left|\gamma_{12}(\gamma)\right| \le 1$$

可将 $\gamma_{12}(\tau)$ 与 Q 点的干涉条纹可见度联系起来!

对于正弦型主，迈克逊定义的干涉条纹可见度为

$$V=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$$

式中 $I_{\max}$ 和 $I_{\min}$ 分别是 Q 点附近干涉条纹的极大和极小强度值.

$$I_{\max}=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}$$

$$I_{\min}=I_1(Q)+I_2(Q)-2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}$$

于是

$$V=\frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q)+I_2(Q)}\left|\gamma_{12}(\tau)\right|$$

A）基础光学中的干涉条纹的可见度的表达式为

$$V=\frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q)+I_2(Q)}\left|\gamma_{12}(\tau)\right|$$

$\left|\gamma_{12}(\tau)\right|$ 的物理意义为 Q 点附近光场的相干程度。

$\gamma_{12}(\tau)$ 幅角的物理意义是光场的相位延迟

B）当 $I_1(Q)=I_2(Q)$

$$V=\left|\gamma_{12}(\tau)\right|$$

第五章 部分相干理论

§5.5 在准单色条件下的干涉

§5.6 互相干的传播

§5.7 范西特-泽尼克定理

§5.5 在准单色条件下的干涉

准单色光条件： 窄带 $\Delta\nu << \bar{\nu}$

小程差 $\dfrac{r_2 - r_1}{c} << \tau_c$

第一个条件，很窄的范围 $\Delta\nu$ 决定了相干时间，即

$$\tau_c = 1/\Delta\nu$$

根据准单色的第二个条件，必有

$$\tau << 1/\Delta\nu, \Delta\nu\tau << 1$$

因此 $$\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^\infty G_{12}(\nu)\exp[i2\pi\nu t]d\nu$$
$$= \exp[i2\pi\bar{\nu}t]\int_0^\infty G_{12}(\nu)\exp[i2\pi(\nu - \bar{\nu})t]d\nu$$

$$\Gamma_{12}(\tau) = \exp[i2\pi\bar{\nu}t]\int_0^\infty G_{12}(\nu)d\nu = \exp[i2\pi\bar{\nu}t]\Gamma_{12}(0)$$

$$\Gamma_{12}(0) = \tilde{\Gamma}_{12}(0)\exp[i\alpha_{12}(0)]$$

令 $$J_{12}(0)=\Gamma_{12}(0), \beta_{12}=\alpha_{12}(0)$$

则有 $$J_{12}(0)=\tilde{J}_{12}(0)\exp[i\beta_{12}]$$

J_{12}为P_1和P_2点的互强度，表示P_1和P_2两点在相对时间延迟 $\tau=0$ 的情况下的互相关。

$\Gamma_{12}(\tau)$ 可写成

$$\Gamma_{12}(\tau)=J_{12}\exp[i2\pi\bar{\nu}\tau]=\tilde{J}_{12}\exp[i(2\pi\bar{\nu}\tau+\beta_{12})]$$

$$\gamma_{12}(\tau)=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{12}(0)}}=\frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1I_2}}=\frac{\Gamma_{12}(0)}{\sqrt{I_1I_2}}e^{i2\pi\bar{\nu}\tau}$$

$$=\frac{J_{12}}{\sqrt{I_1I_2}}e^{i2\pi\bar{\nu}\tau}=\gamma_{12}(0)e^{i2\pi\bar{\nu}\tau}=\mu_{12}e^{i2\pi\bar{\nu}\tau}$$

式中 $\mu_{12}=\gamma_{12}(0)=\tilde{\mu}_{12}\exp[i\beta_{12}]$ 称为复相干系数

$$\gamma_{12}(\tau)=\tilde{\mu}_{12}e^{i(2\pi\bar{\nu}\tau+\beta_{12})}$$

显然 μ_{12} 满足: $0\le\left|\mu_{12}\right|\le1$

辐射场的干涉定律

$$I(Q)=I_1(Q)+I_2(Q)+2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}\,\tilde{\mu}_{12}\cos[\beta_{12}+2\pi\bar{\nu}\tau]$$

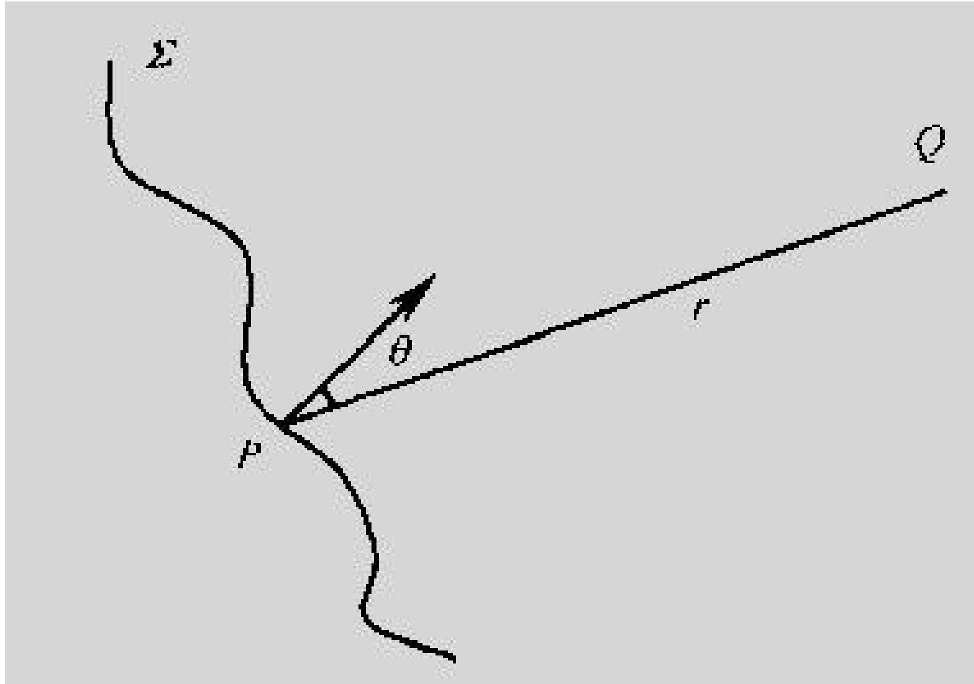
式中 β_{12} 是与 τ 无关的量。

如果 $I_1(Q)$ 和 $I_2(Q)$ 在观察区内近似不变，在该区域干涉图样具有几乎恒定的可见度和相位。这时，条纹可见度为

$$V=\frac{2\sqrt{I_1(Q)I_2(Q)}}{I_1(Q)+I_2(Q)}\mu_{12}$$

§ 5.6 互相干的传播

当光波在空间传播时，其详细结构会发生变化．互相干函数的详细结构也以同样的方式在变化。在这个意义上说互相干函数在传播。



根据惠更斯-菲涅耳原理，一个单色光波入射到一个无限大表面，可写出Q点的复振幅表达式

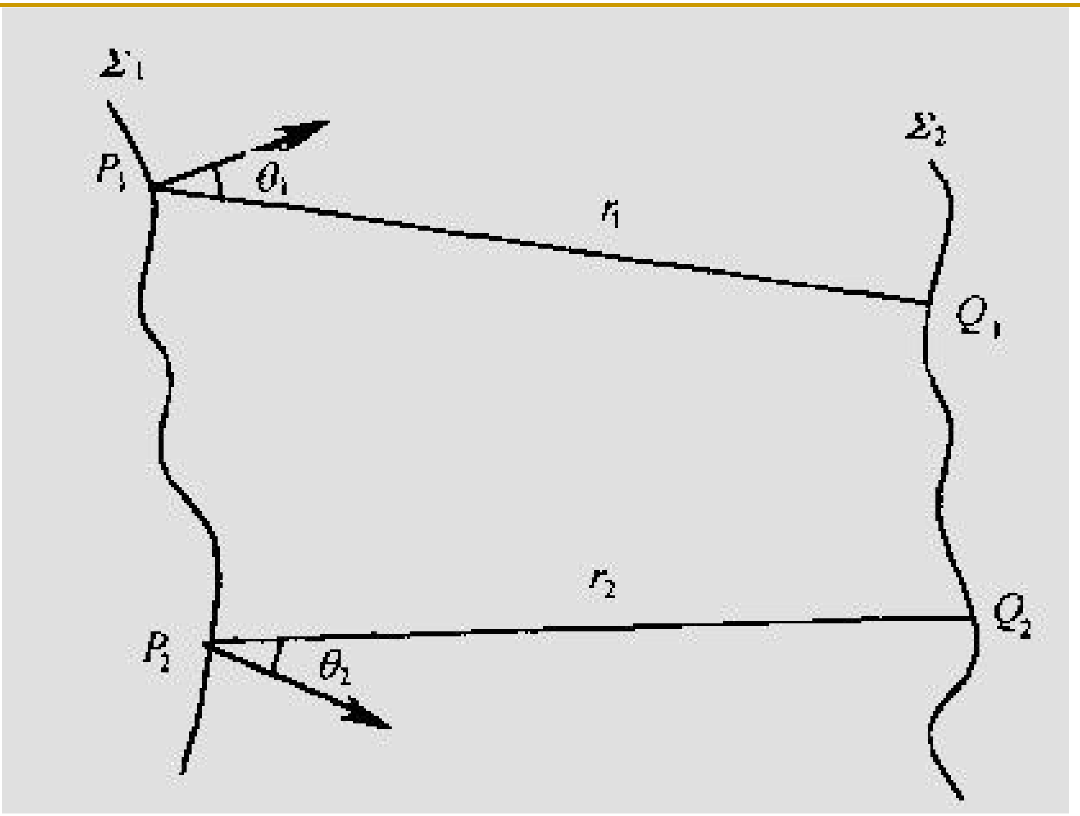
$$u(Q) = \frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma} u(P)K(\theta)\frac{\exp[i2\pi r/\lambda]}{r}dS$$

现在考虑非单色光波入射！

对于窄带光，Q点的解析信号表达式可以简化为

$$u(Q,t)=\iint_{\Sigma}\frac{u(P,t-r/c)}{i\bar{\lambda}r}K(\theta)dS$$

式中 $\bar{\lambda}$ 是中心波长。



已知在 Σ_1 面上的互相干函数 $\Gamma(P_1, P_2, \tau)$

寻找 Σ_2 面上的互相干函数 $\Gamma(Q_1, Q_2, \tau)$

已知针孔P1和P2的杨氏干涉，预测针孔Q1和Q2的杨氏干涉结果!

窄带情形: Σ_2 面上的互相干函数定义为

$$\Gamma(Q_1, Q_2, \tau) = \left\langle u(Q_1, t+\tau) u^*(Q_2, t) \right\rangle$$

$$u(Q_1, t) = \iint_{\Sigma} \frac{u(P_1, t+\tau - r_1/c)}{i\bar{\lambda} r_1} K(\theta_1) dS_1$$

$$u^*(Q_2, t) = \iint_{\Sigma} -\frac{u(P_2, t+\tau - r_2/c)}{i\bar{\lambda} r_2} K(\theta_2) dS_2$$

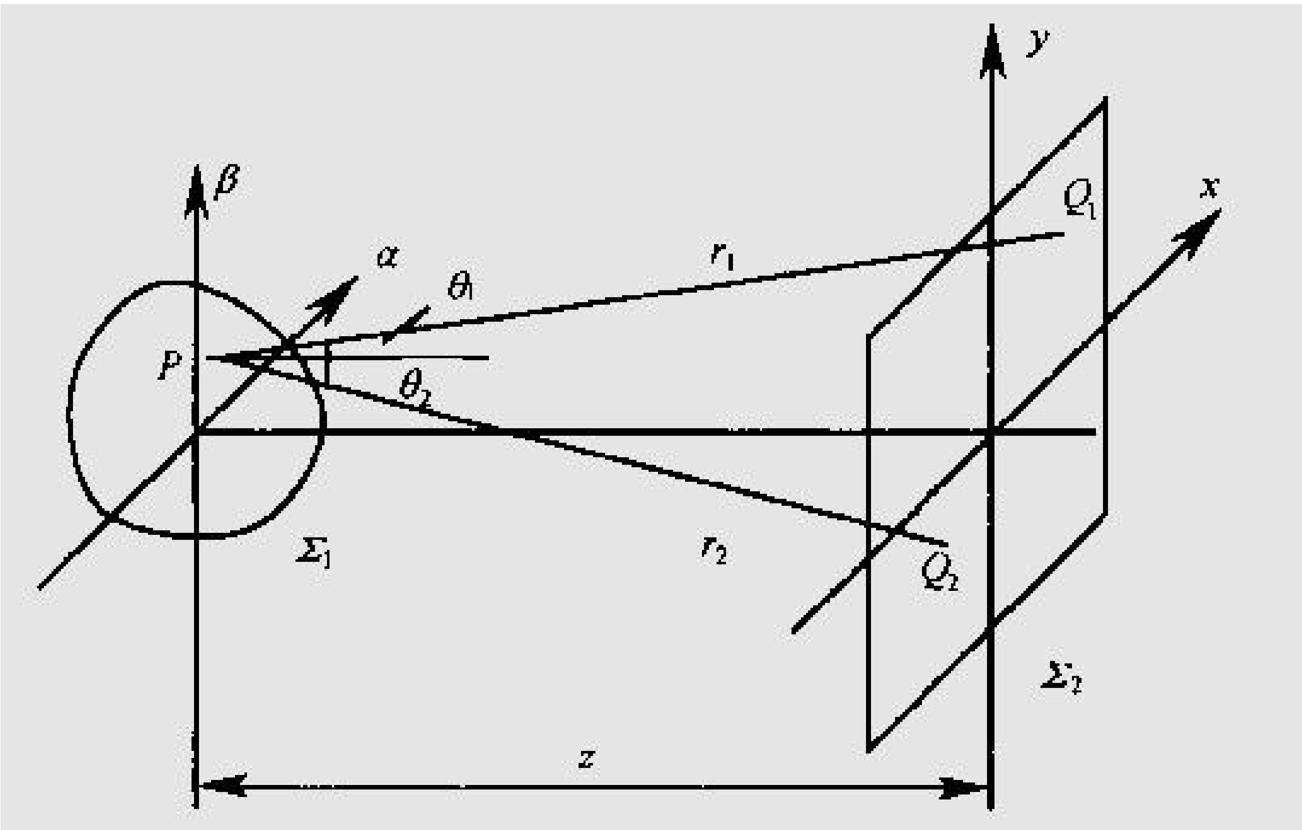
通过交换积分和求平均的次序得

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \frac{\left\langle u(P_1, t+\tau - r_1/c) u^*(P_2, t - r_2/c) \right\rangle}{\bar{\lambda}^2 r_1 r_2} K(\theta_1) K(\theta_2) dS_1 dS_2$$

在窄带假设下互相干传播的基本定律！

$$\Gamma(Q_1,Q_2;\tau)=\iint_{\Sigma_1}\iint_{\Sigma_1}\Gamma\left(P_1,P_2;\tau+\frac{r_2-r_1}{c}\right)\frac{K(\theta_1)}{\bar{\lambda}r_1}\frac{K(\theta_2)}{\bar{\lambda}r_2})dS_1dS_2$$

§ 5.7 范西泰-泽尼克定理



即使 Σ_1面上的光场是非相干的，在 Σ_2 面上的各点对(Q_1,Q_2)的光振动之间都存在一定的联系，也就是有一定的相干性。

一、范西特—泽尼克定理

范西特—泽尼克(Van Cittert-Zernike)定理：讨论由准单色(空间)非相干光源照明面产生的光场的互强度。

扩展光源 Σ_1 上的互强度$J(P_1,P_2)$ 和观察面Σ_2 上的互强度

$J(Q_1,Q_2)$ 由下式联系

$$J(Q_1,Q_2)=\iint\limits_{\Sigma_1}\iint\limits_{\Sigma_1} J\left(P_1,P_2\right)e^{\frac{i2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2-r_1)}\frac{K(\theta_1)}{\bar{\lambda}r_1}\frac{K(\theta_2}{\bar{\lambda}r_2})dS_1dS_2$$

对于空间非相干光源，两个不同点的光振动统计无关，因而有

$$J(P_1,P_2)=I(P_1)\delta(P_1-P_2)$$

观察屏幕上的互强度为

$$J(Q_1,Q_2)=\frac{1}{\bar{\lambda}^2}\iint_{\Sigma_1} I\left(P_1\right)e^{\frac{i2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2-r_1)}\frac{K(\theta_1)}{\bar{\lambda}r_1}\frac{K(\theta_2)}{\bar{\lambda}r_2}dS$$

我们如下假设和近似：

(1)光源和观察区的线度与两者之间的距离z相比很小 $r_1 r_2 \ll z^2$

(2)只涉及小角度 $K(\theta_1)\approx K(\theta_2)\approx 1$

观察区的互强度取如下形式

$$J(Q_1,Q_2)=\frac{1}{(\bar{\lambda}z)^2}\iint_{\Sigma_1} I\left(P_1\right)e^{\frac{i2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2-r_1)}dS$$

再对指数函数中的r_1和r_2引入傍轴近似

$$r_2 = \sqrt{z^2 + (x_2-\alpha)^2 + (y_2-\beta)^2} \approx z + \frac{(x_2-\alpha)^2 + (y_2-\beta)^2}{2z}$$

$$r_1 = \sqrt{z^2 + (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2} \approx z + \frac{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2}{2z}$$

由于 α,β 在有限的光源范围Σ_1之外时，$I(\alpha,\beta)=0$

范西特—泽尼克定理

$$J(x_1,y_1;x_2,y_2) = \frac{e^{i\psi}}{(\bar{\lambda} z)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha,\beta) e^{-\frac{2\pi}{\bar{\lambda} z}(\Delta x\alpha + \Delta y\beta)} d\alpha\, d\beta$$

$$J(x_1,y_1;x_2,y_2)=\frac{e^{i\psi}}{(\bar{\lambda}z)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}I(\alpha,\beta)e^{-\frac{2\pi}{\bar{\lambda}z}(\Delta x\alpha+\Delta y\beta)}d\alpha d\beta$$

式中　$\Delta x=x_2-x_1,\Delta y=y_2-y_1$

相位因子 $\psi=\frac{\pi}{\bar{\lambda}z}[(x_2^2+y_2^2)-(x_1^2+y_1^2)]=\frac{\pi}{\bar{\lambda}z}(\rho_2^2-\rho_1^2)$

其中 ρ_1,ρ_2 分别是点(x_1,y_1)和(x_2,y_2) 离光轴的距离。

把这一定理表示成归一化形式往往更方便！

先计算Ql和Q2点的强度。

$$I(x_1, y_1) = I(x_2, y_2) = \frac{1}{(\bar{\lambda} z)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

于是 $$\mu(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{J(x_1, y_1; x_2, y_2)}{\sqrt{I(x_1, y_1) I(x_2, y_2)}}$$

$$= \frac{e^{i\psi} \iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) e^{-\frac{2\pi}{\bar{\lambda} z}(\Delta x \alpha + \Delta y \beta)} d\alpha d\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}$$

当光源本身的线度以及观察区域的线度都比二者间的距离小得多时，观察区域上的复相干系数正比于光源强度分布的归一化傅里叶变换。

$\mu(Q_1, Q_2)$ 和 $I(\alpha, \beta)$ 之间存在着傅里叶变换关系。这种运算关系类似于夫琅禾费衍射。但是，范西泰特—策尼克定理在更宽的空间范围内成立，因为我们只涉及了傍轴近似，在衍射问题中对菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射都适用.

二、相干面积

范西特—泽尼克定理可以导出准单色扩展光源的空间相干性。

定义相干面积 $$A_c = \int\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mu(\Delta x, \Delta y)\right|^2 d\Delta x d\Delta y$$

在性质上完全类似于所定义的相干时间 τ_c

形状任意的均匀非相干单色光源，面积为 A_s，

在离光源z处的相干面积

$$A_c = \frac{(\bar{\lambda} z)^2}{A_s} \approx \frac{(\bar{\lambda})^2}{\Omega_s}$$

式中 Ω_s 是光源对观察区原点所张的立体角。

三、 均匀圆形光源

下面我们计算一个亮度均匀、非相干准单色、半径为a的团盘形光源所产生的光场，作为应用范西特—泽尼克定理的一个例子。

设光源的强度分布：

$$I(\alpha,\beta)=I_0 circ\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{a}\right)=I_0 circ\left(\frac{r}{a}\right)$$

为求出 $J(\Delta x, \Delta y)$，采用极坐标的强度傅里叶—贝塞尔变换

$$B\left\{I_0 circ\left(\frac{r}{a}\right)\right\} = 2\pi I_0 \int_0^a rJ0(2\pi r\rho)dr$$

式中 ρ 为领域中的极坐标半径。

为完成上式的积分，令$r' = 2\pi r\rho$

并利用第一类零阶和一阶贝塞尔函数的积分关系

$$\int_0^x \alpha J_0(\alpha)d\alpha = xJ_1(x)$$

于是：$B\left\{J_0 circ\left(\frac{r}{a}\right)\right\} = \frac{I_0}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi a\rho} r' J_0(r')dr' = \pi a^2 \frac{2J_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho}$

得

$$J(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{i\psi}}{(\bar{\lambda} z)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) e^{-i2\pi\left(\frac{\Delta x}{\bar{\lambda} z}\alpha + \frac{\Delta y}{\bar{\lambda} z}\beta\right)} d\alpha d\beta$$

$$= \frac{\pi a^2 I_0}{(\lambda z)^2} e^{i\psi} \left[\frac{2J_1(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho}\right]$$

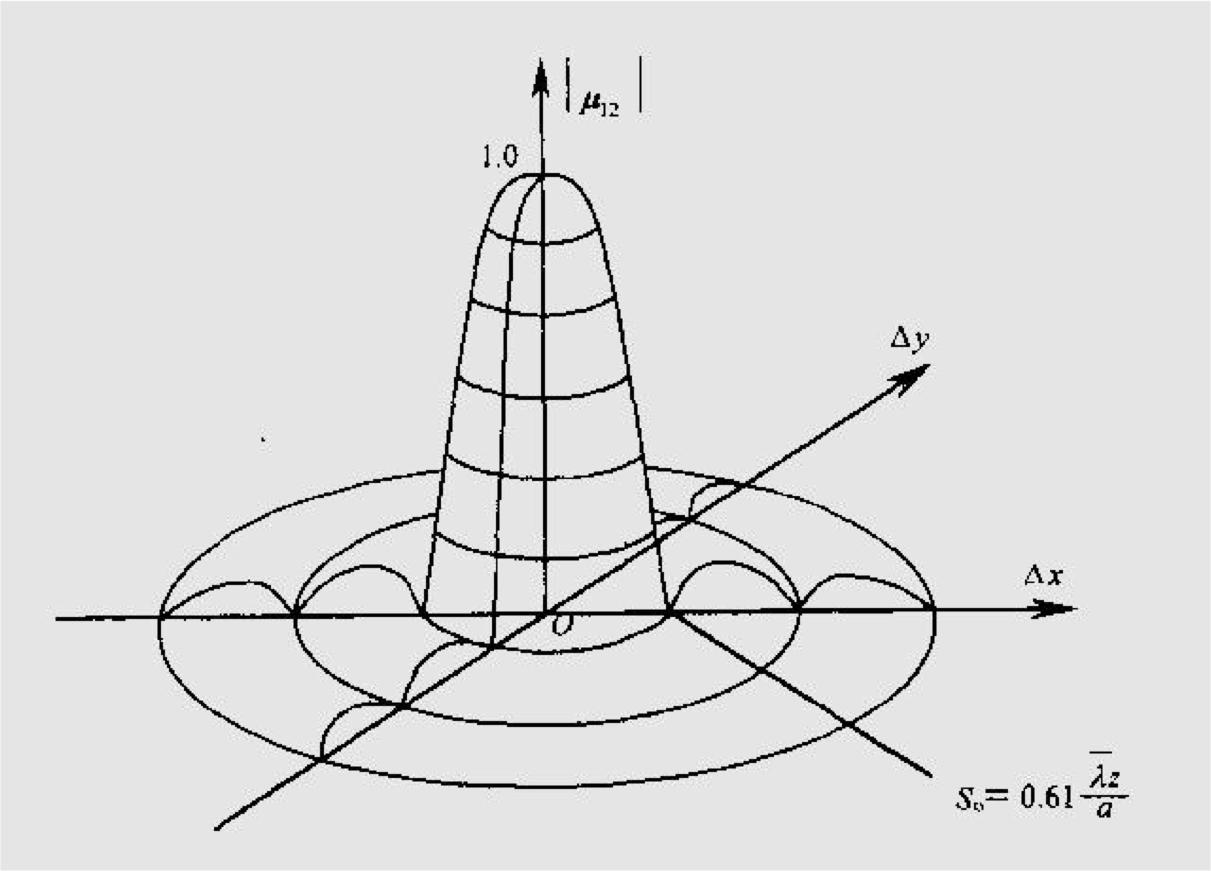
式中

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\overline{\lambda} z}\right)^{2}+\left(\frac{\Delta y}{\overline{\lambda} z}\right)^{2}}=\frac{1}{\overline{\lambda} z}\sqrt{(\Delta x)^{2}+(\Delta y)^{2}}=\frac{s}{\overline{\lambda} z}$$

式中 $s=\sqrt{(\Delta x)^{2}+(\Delta y)^{2}}$ 是两点间的距离。

相应的复相干系数为

$$\mu(\Delta x,\Delta y)=e^{i\psi}\left[\frac{2J_{1}(2\pi a\rho)}{2\pi a\rho}\right]$$



$|\mu_{12}|$
1.0
Δy
Δx
O
$S_0 = 0.61 \frac{\bar{\lambda} z}{a}$

总结

- 第四章 光学成像系统的频率响应
- 相干照射

  脉冲响应函数→相干传递函数
- 非相干照射

  光学传递函数
- 截止频率 $\rho_i = 2\rho_c$

- 第五章 部分相干理论
- 互相干函数

- 范西特-泽尼克定理:互相干函数的传播

作业：均匀方形光源的互强度和相干面积

光源的强度分布：

$$I(\alpha,\beta)=I_0 rect(\frac{\alpha}{L})rect(\frac{\beta}{L})$$